



**FernUniversität**

Gesamthochschule in Hagen

FACHBEREICH INFORMATIK

LEHRGEBIET PRAKTISCHE INFORMATIK VI

## Diplomarbeit

**Das Voronoi-Diagramm von Liniensegmenten und eine  
Anwendung auf ein Problem mit zusammengesetzten Metriken**

eingereicht im: März 2002

von: Wolfgang Schumann

geboren am 25. November 1967

in Köln

Betreuer: Dr. Christian Icking



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>5</b>
1.1	Mathematische Grundlagen . . . . .	6
1.1.1	Der metrische Raum $\mathbb{R}^2$ . . . . .	6
1.1.2	Weg im $\mathbb{R}^2$ . . . . .	10
1.1.3	Spezielle Funktionen . . . . .	10
1.1.4	Geometrische Graphen . . . . .	11
1.2	Das klassische Voronoi-Diagramm . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Das VD von Liniensegmenten</b>	<b>15</b>
2.1	Der Bisektor . . . . .	15
2.1.1	Punkt-Punkt-Bisektor . . . . .	16
2.1.2	Punkt-Liniensegment-Bisektor . . . . .	16
2.1.3	Bisektor zwischen disjunkten Liniensegmenten . . . . .	18
2.1.4	Bisektor nichtdisjunkter Liniensegmente . . . . .	22
	Bisektor sich schneidender Liniensegmente . . . . .	22
	Endpunkt eines Segmentes auf dem anderen Segment . . . . .	23
	Bisektor von Liniensegmenten mit gemeinsamen Endpunkt . . . . .	24
	Bisektor sich überlagernder Liniensegmente . . . . .	25
2.2	Voronoi-Regionen . . . . .	25
2.3	Das Voronoi-Diagramm . . . . .	31
2.3.1	Diskjunkte Liniensegmente . . . . .	33
2.3.2	Polygonzug . . . . .	34
<b>3</b>	<b>Das Laufbandmodell</b>	<b>37</b>
3.1	Einführung . . . . .	37

3.1.1	Definition des Laufbandmodells . . . . .	38
3.1.2	Laufbandwege . . . . .	39
3.1.3	Alternative Betrachtung des Laufbandmodells . . . . .	44
3.2	Geh- und Bandbereiche eines Punktes . . . . .	44
3.2.1	$L^+$ . . . . .	45
3.2.2	$L^-$ . . . . .	50
3.2.3	Zusammenfassung . . . . .	52
3.3	Der Bisektor . . . . .	55
3.3.1	Punkte in der gleichen Halbebene . . . . .	60
3.3.2	Punkte in verschiedenen Halbebenen . . . . .	63
3.3.3	Dominanz eines Punktes . . . . .	64
3.3.4	Punkte mit gleicher Stützlinie . . . . .	66
3.3.5	Zusammenfassung . . . . .	68
3.4	Die Voronoi-Region . . . . .	69
3.5	Das Voronoi-Diagramm . . . . .	76
3.6	Spezielle Voronoi-Diagramme . . . . .	82
3.7	Zusammenfassung . . . . .	84
<b>4</b>	<b>Algorithmen</b>	<b>85</b>
4.1	Laufzeit . . . . .	86
4.2	Offene Liniensegmente . . . . .	89
4.3	Grundlagen . . . . .	90
4.4	Die Datenstruktur . . . . .	91
4.5	Die Prozeduren . . . . .	94
4.5.1	Punkt einfügen . . . . .	94
4.5.2	Segment einfügen . . . . .	101
4.5.3	Spezielle Knoten und Kanten . . . . .	104
4.5.4	Temporäres Einfügen . . . . .	105
4.6	VoroBand . . . . .	105
4.7	Implementation . . . . .	106
<b>5</b>	<b>Abschließende Bemerkungen</b>	<b>111</b>

# Kapitel 1

## Einleitung

Voronoi-Diagramme bilden ein weites Gebiet in der Algorithmischen Geometrie und dienen unter anderem zur Bearbeitung von geometrischen Distanzproblemen. Hat man eine Menge  $\mathcal{S}$  von Objekten in einem Raum  $\mathcal{R}$  so bildet das Voronoi-Diagramm  $VD(\mathcal{S})$  eine Zerlegung des Raumes  $\mathcal{R}$  in Voronoi-Regionen  $VR(p)$  für  $p \in \mathcal{S}$ . Die Voronoi-Region  $VR(p)$  beinhaltet genau die Punkte des Raumes  $\mathcal{R}$ , die zu  $p$  eine geringere Distanz haben als zu den anderen Objekten  $p' \in \mathcal{S} \setminus \{p\}$ . Je nach Wahl des Raumes  $\mathcal{R}$ , der Objektmenge  $\mathcal{S}$  und der Definition einer Distanz, erhält man unterschiedliche Voronoi-Diagramme. Betrachtet man Objekte in metrischen Räumen, so wird bereits durch die Metrik eine Distanz definiert.

Das klassische Voronoi-Diagramm behandelt eine endliche Punktmenge in der reellen Zahlenebene unter der euklidischen Metrik. Ansätze hierzu finden sich bereits im 17. Jahrhundert bei Descartes [2]. Systematische Untersuchungen wurden erst von den Mathematikern Dirichlet [3] und Voronoi [13] durchgeführt. In ihrer Arbeit über die 'Closest-point problems' führten Shamos und Hoey [11] die Voronoi-Diagramme in die Algorithmische Geometrie ein. In der Algorithmischen Geometrie ist vor allem die effiziente Berechnung von Voronoi-Diagrammen von Interesse. Für das klassische Voronoi-Diagramm haben bereits Shamos und Hoey einen divide-and-conquer Algorithmus angegeben, der das Problem in optimaler  $O(n \log n)$  Zeit löst. Inzwischen gibt es eine Vielzahl von Algorithmen, die das klassische Voronoi-Diagramm mit unterschiedlichen Methoden lösen.

Bleibt man im  $\mathbb{R}^2$ , so kann man durch eine Wahl von verschiedenen Objekten und Metriken andere Voronoi-Diagramme untersuchen. Oft bildet dann das klassische Voronoi-Diagramm einen Spezialfall, wodurch schon eine Grenze für die Zeitkomplexität gegeben ist. Einen Überblick über Anwendungen und Berechnung von Voronoi-Diagrammen findet man in [1] und [8].

Diese Arbeit behandelt zum einen das Voronoi-Diagramm von Liniensegmenten in der reellen Zahlenebene. Es werden die geometrischen Eigenschaften beschrieben sowie ein Algorithmus zur Berechnung vorgestellt, der mit einem Java-Programm implementiert wurde. Zum anderen beschreibt diese Arbeit das spezielle Voronoi-Diagramm des Laufbandmodells ('Continuous Model'). Diesem Modell liegt eine andere Metrik zu Grunde. Es wird gezeigt, dass sich die Berechnung dieses Diagramms auf die Berechnung des Voronoi-Diagramms von Liniensegmenten zurückführen lässt. Zur Veranschaulichung wurde die Berechnung des Voronoi-Diagramms mit einem Java-Programm umgesetzt, das das obige Programm benutzt.

## 1.1 Mathematische Grundlagen

Zu Beginn gebe ich eine Übersicht über die elementaren mathematischen Definitionen und Aussagen, die für diese Arbeit erforderlich sind. Die Inhalte finden sich in einer Vielzahl von Lehrbüchern. Ich verzichte daher auf die Beweise der Aussagen. Abweichend von den üblichen Schreibweisen ist für das Lesen der Arbeit die Definition 1.7 der Streifenzerlegung und die Bezeichnung der Mengen von Bedeutung.

### 1.1.1 Der metrische Raum $\mathbb{R}^2$

**Definition 1.1.** Sei  $X$  eine nichtleere Menge und  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften für alle  $x, y, z$  in  $X$ :

$$d(x, y) \geq 0, \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad \text{positive Definitheit} \quad (1.1)$$

$$d(x, y) = d(y, x) \quad \text{Symmetrie} \quad (1.2)$$

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \text{Dreiecksungleichung} \quad (1.3)$$

Dann nennt man  $d$  eine Metrik auf  $X$  und  $(X, d)$  einen metrischen Raum.

$\mathbb{R}^2$  ist ein reeller Vektorraum, auf dem die euklidische Norm für  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  definiert ist durch  $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ . Die euklidische Norm induziert die euklidische Metrik  $d_e(x, y) = |x - y|$ . Faktorisiert man diese Norm mit einem Faktor  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ , so erhält man eine entsprechende Metrik  $d_\lambda(x, y) = \lambda|x - y|$ . In einem metrischen Raum kann man einen allgemeinen Abstand von Mengen definieren.

**Definition 1.2.** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $P, Q$  zwei nichtleere Mengen, so definiert man den Abstand zwischen  $P$  und  $Q$  durch  $d_e(P, Q) := \inf\{d_e(p, q) \mid p \in P, q \in Q\}$ .

Aus der Definition folgt direkt:  $P \cap Q \neq \emptyset \Rightarrow d_e(P, Q) = 0$ . Wir betrachten nun Objekte auf der reellen Zahlenebene. Ein Element der Menge  $\mathbb{R}^2$  ist eine Punkt. Wir interessieren uns für Liniensegmente im  $\mathbb{R}^2$ .

**Definition 1.3.** Seien  $a, b \in \mathbb{R}^2$  zwei Punkte. Dann nennen wir  $l := \overline{ab} := \{(1-t)a + tb \mid 0 \leq t \leq 1\}$  das Liniensegment zwischen den Endpunkten  $a$  und  $b$ . Für  $a \neq b$  bezeichnen wir das offene Liniensegment zwischen  $a$  und  $b$  mit  $\overset{\circ}{l} := \{(1-t)a + tb \mid 0 < t < 1\}$ .

**Bemerkung.** Ein Liniensegment nennt man auch Strecke oder Linie zwischen (von)  $a$  und (nach)  $b$ .

Wählt man den Parameter  $t$  aus ganz  $\mathbb{R}$ , so erhält man eine Gerade durch  $a$  und  $b$ . Beschränkt man  $t$  nur einseitig, d.h.  $t \geq 0$  oder  $t \leq 1$ , so erhält man eine Halbgerade mit einem Endpunkt  $a$  oder  $b$ .

Sei  $z$  ein Punkt und  $l$  ein Liniensegment im metrischen Raum  $(\mathbb{R}^2, d_e)$ . Dann ist  $d_e(z, l) = \min_{p \in l}(d_e(z, p))$  der Abstand des Punktes  $z$  zum Liniensegment  $l$ . Entsprechendes gilt für den Abstand eines Punktes zu einer Gerade.

**Lemma 1.4.** Ist  $z$  ein Punkt,  $g$  eine Gerade und  $l$  eine Liniensegment mit  $l \subset g$ , dann gilt  $d_e(z, g) \leq d_e(z, l)$ .

**Definition 1.5.** Sei  $g$  eine Gerade und  $z$  ein Punkt. Der Punkt  $g_z \in g$  mit  $d_e(z, g_z) = d_e(z, g)$  heißt Lotpunkt von  $z$  auf  $g$ .

Sei  $l$  ein Liniensegment. Den Punkt  $l_z$  auf  $l$  mit  $d_e(z, l_z) = d_e(z, l)$  bezeichnen wir als Fußpunkt von  $z$  auf  $l$ .

Ist  $g$  die Gerade durch  $l$  und gilt  $g_z = l_z$ , so nennen wir  $l_z$  Lotpunkt von  $z$  auf  $l$ .

**Lemma 1.6.** Sei  $z$  ein Punkt und  $l = \overline{ab}$  ein Liniensegment in  $\mathbb{R}^2$ , dann gilt

$$l_z \text{ ist Lotpunkt von } z \text{ auf } l \vee l_z \in \{a, b\}.$$

**Bemerkung.** Ist  $l_z$  Lotpunkt von  $z$  (und von  $z$  verschieden), dann liegt die Strecke  $\overline{zl_z}$  senkrecht zu  $l$ .

Die Punkte, die beide Bedingungen des Lemmas erfüllen, sind von besonderer Bedeutung.

Mit einem Liniensegment kann man damit die Ebene  $\mathbb{R}^2$  in drei zusammenhängende Mengen aufteilen.

**Definition 1.7.** Sei  $l = \overline{ab}$  ein Liniensegment. Dann definieren wir

$$H_a := \{z \in \mathbb{R}^2 \mid l_z = a\},$$

$$H_b := \{z \in \mathbb{R}^2 \mid l_z = b\},$$

$$S_l := \{z \in \mathbb{R}^2 \mid l_z \text{ ist Lotpunkt von } z\}.$$

Die Menge  $S_l$  nennen wir den Streifen von  $l$ .

Die Menge  $h_a := H_a \cap S_l$  nennen wir Grenzgerade des Streifens  $S_l$  durch  $a$ . ( $H_a, H_b, S_l$ ) nennen wir die Streifenzerlegung (von  $\mathbb{R}^2$  durch  $l$ ).

Abbildung 1.1 zeigt eine solche Zerlegung.

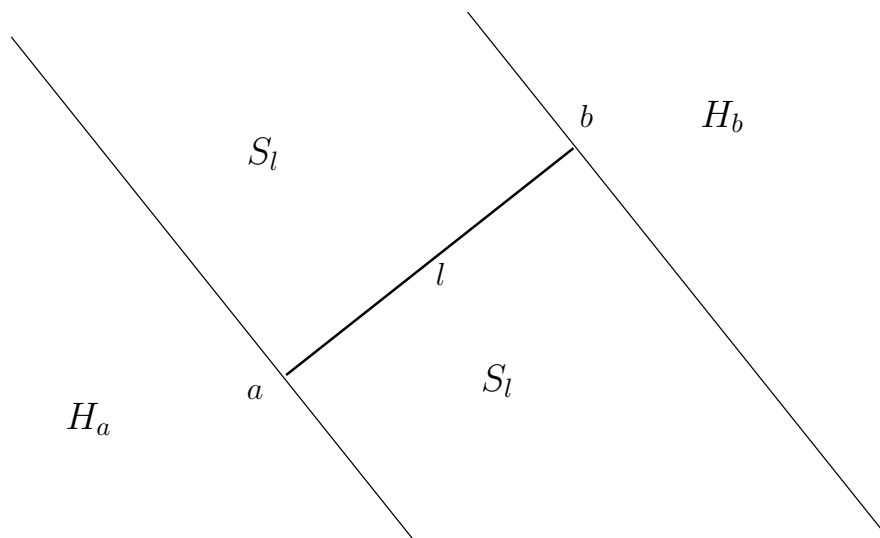
Die Streifenzerlegung werden wir im weiteren benötigen.

Die Mengen  $H_a$  und  $H_b$  sind abgeschlossene Halbebenen. Die Gerade  $h_a$  als Schnitt von  $H_a$  mit dem  $S_l$  hat die besondere Eigenschaft, dass sie senkrecht zu  $l$  liegt und durch den Endpunkt  $a$  verläuft. Diese Gerade bildet insbesondere den Rand der abgeschlossenen Halbebene  $H_a$ .

**Definition 1.8.** Seien  $k, l$  zwei Liniensegmente im metrischen Raum  $(\mathbb{R}^2, d_e)$ . Dann nennt man  $d_e(k, l) := \min_{p \in l} \{d_e(k, p)\} = \min_{p \in l, q \in k} \{d_e(p, q)\}$  den Abstand der Liniensegmente  $k$  und  $l$ .

Sei  $p \in \mathbb{R}^2$ , so besteht die Linie  $\{(1-t)p + tp \mid t \in [0, 1]\}$  nur aus dem Punkt  $p$ . Man kann einen Punkt somit als spezielle Linie interpretieren, obwohl  $p \neq \{p\}$ . Der Übersichtlichkeit wegen wird bei manchen Aussagen auf



Abbildung 1.1: Streifenzerlegung von  $\mathbb{R}^2$  durch  $l$ .

die Klammerung von  $p$  verzichtet. Entsprechend beziehen sind die Aussagen 'Element in' und 'Teilmenge von' auf einen Punkt oder auf die entsprechende einpunktige Linie.

Neben den Liniensegmenten und Geraden benötigen wir noch die Definition der Parabel.

**Definition 1.9.** Sei  $g$  eine Gerade und  $z$  ein Punkt in  $\mathbb{R}^2$ .

Dann nennt man  $\gamma_{z,g} = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid d_e(p, z) = d_e(p, g)\}$  die Parabel mit Brennpunkt  $z$  und Leitlinie  $g$ . Ist  $l = \overline{ab}$  ein Liniensegment mit  $l \subset g$ , so definieren  $z$  und  $l$  das Parabelsegment  $\gamma_{z,l} = \gamma_{z,g} \cap S_l$ .

**Bemerkung.** Es gibt verschiedene, äquivalente Definitionen einer Parabel. Erwähnt sei hier die Klasse `QuadCurve2D` des Paketes `java.awt.geom` der Klassenbibliothek der Programmiersprache JAVA. Die Instanzen der Klasse sind Parabelsegmente die durch drei Punkte definiert sind. Es sind die beiden Endpunkte eines Parabelsegments und der Schnittpunkt der beiden Tangenten in den beiden Endpunkten [12].

### 1.1.2 Weg im $\mathbb{R}^2$

Sei  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Abbildung. Die Bildmenge  $W := f[0, 1]$  bezeichnen wir als Weg oder Kurve im  $\mathbb{R}^2$  mit den Endpunkten  $f(0)$  und  $f(1)$ . Die Funktion  $f$  nennt man die Parametrisierung von  $W$ . Beispielsweise sind Liniensegmente und Parabelsegmente spezielle Wege im  $\mathbb{R}^2$ .

Sind  $f[0, 1]$  und  $g[0, 1]$  zwei Wege mit gemeinsamen Endpunkt  $f(1) = g(1)$ , so können sie zu einem Weg  $h[0, 1]$  zusammengefügt werden mittels  $h(t) = f(2t)$  für  $t \leq \frac{1}{2}$  und  $h(t) = g(2(t - \frac{1}{2}))$  für  $t \geq \frac{1}{2}$ .

Entsprechend kann eine endliche Menge von  $n$  Wegen  $f_i[0, 1]$  mit  $f_i(1) = f_{i+1}(0)$  zusammengesetzt werden. Wir bezeichnen diesen Weg mit  $\sum_{i=1}^n f_i[0, 1]$ . Sind die Wege  $f_i[0, 1]$  Liniensegmente, so nennt man  $\sum_{i=1}^n f_i[0, 1]$  einen Polygonzug.

Die Länge eines Liniensegments kann man als Abstand seiner Endpunkte definieren:  $\ell(\overline{ab}) = d(a, b)$ . Die Länge eines Polygonzugs leitet sich dann als Summe der Längen seiner Liniensegmente ab. Für einen beliebigen Weg kann man die Länge über die Approximation durch Polygonzüge definieren. Sei  $f[0, 1]$  ein Weg und  $T_n = \{t_1, \dots, t_n\}$  eine endliche Menge mit  $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_n = 1$ . Die Liniensegmente  $\overline{f(t_i)f(t_{i+1})}$  bilden einen Polygonzug  $P(T_n)$  mit der Länge  $\ell(P(T_n)) = \sum_{i=1}^{n-1} d(f(t_i), f(t_{i+1}))$ . Existiert das Supremum aller Längen aller möglichen Polygonzüge  $P(T_n)$ , so nennt man den Weg  $f[0, 1]$  rektifizierbar. Das Supremum ist die Länge des Weges. Seien  $a$  und  $b$  zwei Punkte, so bezeichnen wir mit  $\Gamma_{ab}$  die Menge aller Wege zwischen  $a$  und  $b$ .

### 1.1.3 Spezielle Funktionen

Um die Güte von Algorithmen zu bestimmen, benutzt man Funktionen als Schranken für den Zeit- und Speicherplatzbedarf. Sei  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$  eine Funktion, so definiert man die folgende  $O$ -Notation als obere Schranke durch

$$O(f) := \{g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+ \mid \exists m \in \mathbb{N} \exists C > 0 \forall n > m : g(n) \leq Cf(n)\}$$

Als untere Schranke benutzt man die  $\Omega$ -Notation

$$\Omega(f) := \{g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+ \mid \exists m \in \mathbb{N} \exists c > 0 \forall n > m : g(n) \geq cf(n)\}$$

Die Funktion  $g \in O(f)$  werden durch  $f$  nach oben beschränkt; die Funktionen  $g \in \Omega(f)$  werden durch  $f$  nach unten beschränkt.

Kann man für ein Problem eine Funktion  $f$  als untere Schranke angeben, so ist man um Algorithmen bemüht, die das Problem mit einer oberen Schranke  $f$  lösen. Beispielsweise benötigt das Sortieren von Objekten einen Zeitbedarf von  $f(n) = n \log n$ .

### 1.1.4 Geometrische Graphen

Ein Graph  $G$  ist ein Tupel  $G = (V, E)$ , wobei  $V$  eine endliche Menge und  $E \subset G \times G$  eine Multimenge ist. Die Elemente aus  $V$  nennt man Knoten des Graphen  $G$ . Ein Element  $e = (p, q) \in E$  nennt man Kante zwischen den Knoten  $(p, q)$ . Die Anzahl an Kanten, die einen Knoten als Endpunkt haben, heißt Grad des Knotens.  $E$  als Multimenge erlaubt mehrere Kanten zwischen zwei Knoten. Ebenso sind Schlingen  $(p, p)$  möglich. Gibt es keine Schlingen und mehrfachen Kanten, so nennt man den entsprechenden Graphen schlicht. Weiter kann man gerichtete und ungerichtete Graphen unterscheiden. In gerichteten Graphen ist eine Kante  $(p, q)$  vom Knoten  $p$  zum Knoten  $q$  orientiert, wodurch sich die Kanten  $(p, q)$  und  $(q, p)$  durch ihre Orientierung unterscheiden. In ungerichteten Graphen besteht kein Unterschied. Man kann einen Graphen  $G = (V, E)$  geometrisch realisieren, indem man die Knotenmenge  $V$  auf den  $\mathbb{R}^2$ , die Kantenmenge auf die Menge der einfachen Wege im  $\mathbb{R}^2$  injektiv abbildet, so dass jede Kante zwischen zwei Knoten durch einen Weg dargestellt wird, der die entsprechenden Punkte des  $\mathbb{R}^2$  verbindet. Diese Darstellung nennt man einen geometrischen Graphen. Jeder Graph kann durch unterschiedliche geometrische Graphen dargestellt werden. Uns interessieren aber die geometrischen Graphen als eigenständige Objekte. Man nennt einen geometrischen Graphen kreuzungsfrei, wenn sich keine zwei Kanten schneiden.

**Definition 1.10.** Wir benutzen folgende Bezeichnungen:

- $v$  die Anzahl der Knoten,
- $e$  die Anzahl der Kanten,
- $f$  die Anzahl der Flächen.
- $c$  die Anzahl der Zusammenhangskomponenten.

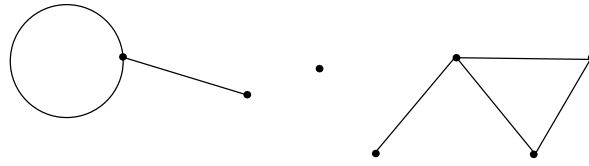


Abbildung 1.2: Geometrischer Graph mit  $v = 7$ ,  $e = 6$ ,  $f = 3$  und  $c = 3$ .

**Theorem 1.11.** Sei  $G = (V, E)$  ein kreuzungsfreier geometrischer Graph. Dann gilt mit den Bezeichnungen von Definition 1.10.

- (i)  $v - e + f = c + 1$  (Eulersche Formel),
- (ii)  $v \leq \frac{2}{3}e$ , wenn alle Knoten mindestens den Grad 3 haben,
- (iii) Flächen haben im Mittel höchstens 6 Kanten.

## 1.2 Das klassische Voronoi-Diagramm

Unter dem klassischen Voronoi-Diagramm verstehen wir das Voronoi-Diagramm einer endlichen Punktmenge unter der euklidischen Metrik im  $\mathbb{R}^2$ . Dieser Abschnitt fasst die wesentlichen Aussagen über das klassische Voronoi-Diagramm zusammen. Definition, Sätze sowie die Beweise zu den einzelnen Sätzen können unter [8] nachgeschlagen werden.

**Definition 1.12.** Sei  $S := \{p_1, \dots, p_n\}$  eine nichtleere, endliche Menge von paarweise verschiedenen Punkten  $p_i \in \mathbb{R}^2$ . Für einen beliebigen Punkt  $\xi \in \mathbb{R}^2$  definieren wir den Abstand von  $\xi$  zu  $S$  mit  $d_e(\xi, S) := \min_{p \in S} d_e(\xi, p)$ .

Für  $p, q \in S$  definieren wir folgende Mengen:

- (1)  $B(p, q) := \{\xi \in \mathbb{R}^2 \mid d_e(p, \xi) = d_e(q, \xi)\}$  heißt der Bisektor von  $p$  und  $q$ .
- (2)  $VR(p, S) := \{\xi \in \mathbb{R}^2 \mid \forall q \in S \setminus \{p\} : d_e(p, \xi) < d_e(q, \xi)\}$  heißt die Voronoi-Region von  $p$  bezüglich  $S$ .
- (3)  $VD(S) := \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{p \in S} VR(p, S)$  heißt das Voronoi-Diagramm von  $S$ .

**Bemerkung.**

- (1) Der Bisektor zwischen zwei Punkten ist eine Gerade, nämlich die Mittelsenkrechte der Punkte.
- (2) Die Voronoi-Region  $VR(p, S)$  des Punktes  $p$  besteht aus genau den Punkten der Ebene  $\mathbb{R}^2$ , die zu  $p$  näher liegen als zu allen anderen Punkten aus  $S$ .
- (3) Jeder Punkt  $z \in VD(S)$  des Voronoi-Diagramms hat zu mindestens zwei Punkten aus  $S$  den gleichen minimalen Abstand  $d_e(z, S)$ . Man kann das Voronoi-Diagramm auch über die Ränder der Voronoi-Regionen definieren, da  $VD(S) = \bigcup_{p \in S} \partial VR(p, S)$  gilt.

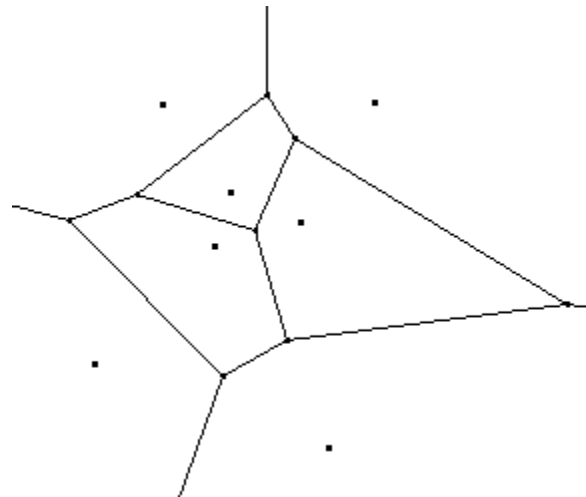


Abbildung 1.3: Das klassische Voronoi-Diagramm von sieben Punkten

**Satz 1.13.** Sei  $S := \{p_1, \dots, p_n\}$  eine nichtleere, endliche Menge von paarweise verschiedenen Punkten  $p_i \in \mathbb{R}^2$  und  $ch(S)$  die konvexe Hülle der Punkte von  $S$ . Für die Voronoi-Region eines Punktes  $p \in S$  gilt:

- (a)  $VR(p, S)$  ist konvex.
- (b)  $VR(p, S)$  unbeschränkt  $\iff p \in ch(S)$ .

Das Voronoi-Diagramm besteht aus Knoten und Kanten. Die Knoten sind Punkte, die zu mindestens drei Elementen aus  $S$  den gleichen Abstand haben. Eine Kante des Voronoi-Diagramms ist der Schnitt des Voronoi-Diagramms mit einem Bisektor zweier Punkte aus  $S$ . Da der Bisektor eine Gerade ist, ist eine Kante des Diagramms ein Liniensegment oder eine Halbgerade. Der oder die Endpunkte sind dann Knoten des Voronoi-Diagramms.

Die Anzahl der Knoten ist endlich. Man kann einen Kreis  $\Gamma$  ziehen, der alle Knoten des Voronoi-Diagramms und alle Punkte aus  $S$  enthält. Dieser Kreis kreuzt nur die unbeschränkten Kanten. Entfernt man außerhalb von  $\Gamma$  die Kanten, so erhält man das so genannte beschränkte Voronoi-Diagramm  $VD_0(S)$ . Dieses beschränkte Voronoi-Diagramm bildet einen kreuzungsfreien geometrischen Graphen. Die Ergebnisse aus Abschnitt 1.1.4 können angewendet werden. Überträgt man diese Ergebnisse auf das Voronoi-Diagramm, so erhält man folgenden Satz:

**Satz 1.14.** *Sei  $S := \{p_1, \dots, p_n\}$  eine endliche Menge von  $n$  paarweise verschiedenen Punkten. Dann gilt:*

- (a)  *$VD(S)$  hat  $O(n)$  Knoten und Kanten,*
- (b) *Der Rand einer Voronoi-Region  $VR(p, S)$ ,  $p \in S$  besteht im Mittel aus höchstens sechs Kanten.*
- (c) *Liegen die Punkte der Menge  $S$  nicht alle auf einer Geraden, so ist das Voronoi-Diagramm zusammenhängend.*

Aufgrund der Konvexität haben die Ränder zweier Voronoi-Regionen höchstens eine Kante des Voronoi-Diagramms gemeinsam. Zwei Regionen heißen benachbart, wenn eine solche Kante existiert.

Betrachten wir noch für die Algorithmen wichtige Frage nach der Zeitkomplexität.

**Satz 1.15.** *Die Konstruktion eines Voronoi-Diagramms von  $n$  Punkten in der Ebene hat die Zeitkomplexität  $O(n \log n)$ . Die Zeitkomplexität ändert sich auch dann nicht, wenn die Punkte bereits nach einer Koordinate sortiert sind.*

# Kapitel 2

## Das Voronoi-Diagramm von Liniensegmenten

Wir betrachten eine endliche Menge von Liniensegmenten in der reellen Zahlenebene und untersuchen die Struktur des Voronoi-Diagramms dieser Segmente unter der euklidischen Metrik. Hierbei kann ein Punkt als Spezialfall eines Liniensegments aufgefasst werden.

### 2.1 Der Bisektor von Liniensegmenten

Der Bisektor zweier Objekte beinhaltet alle die Punkte des Raumes, die zu beiden Objekten den gleichen Abstand haben. Für zwei unterschiedliche Punkte ist diese Menge gerade die Mittelsenkrechte; für zwei sich schneidende Geraden besteht der Bisektor aus den beiden Winkelhalbierenden. Für Liniensegmente genügt eine solche Beschreibung nicht. In diesem Abschnitt seien  $l = \overline{ab}$ ,  $k = \overline{cd}$  Liniensegmente. Nach Definition 1.7 gehören zu  $l$  und  $k$  die Streifenzerlegungen  $(H_a, S_l, H_b)$  und  $(H_c, S_k, H_d)$  mit den dazugehörigen Grenzgeraden  $h_a, h_b, h_c$  und  $h_d$ .

Wir beginnen mit der Definition des Bisektors und untersuchen dann dessen Verlauf. Dazu benutzen wir die Streifenzerlegungen von  $\mathbb{R}^2$  und untersuchen den Bisektor auf den einzelnen Schnittmengen.

**Definition 2.1.** Die Menge  $B(k, l) := \{p \in \mathbb{R}^2 \mid d_e(p, k) = d_e(p, l)\}$  heißt Bisektor von  $k$  und  $l$ .

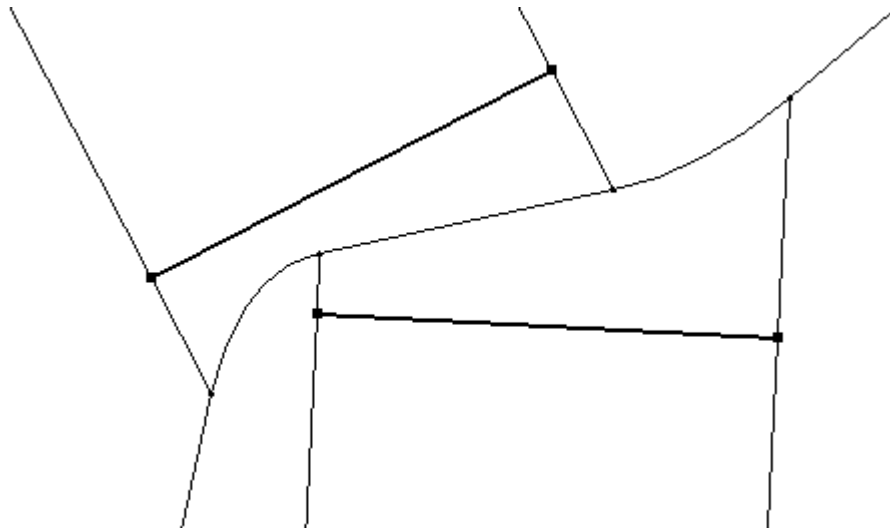


Abbildung 2.1: Der Bisektor von zwei Liniensegmenten

Der Struktur des Bisektors hängt von der Art und der Lage der Liniensegmente ab. Wir betrachten die einzelnen Fälle:

### 2.1.1 Punkt-Punkt-Bisektor

Seien  $p \neq q \in \mathbb{R}^2$  zwei Punkte, dann ist der Bisektor die Mittelsenkrechte zwischen  $p$  und  $q$ .

### 2.1.2 Punkt-Liniensegment-Bisektor

Wir betrachten zuerst den Fall, dass der Punkt nicht auf dem Liniensegment liegt. Sei  $p \notin l = \overline{ab}$  ein Punkt. Wir untersuchen den Bisektor auf den einzelnen Mengen der Streifenzerlegung von  $l$ .

Nach der Definition von  $H_a$  ist für einen Punkt  $z \in H_a$  der Abstand zum Liniensegment  $l$  gleich dem Abstand zum Endpunkt  $a$ . Der Bisektor  $B(p, l)$  entspricht also auf  $H_a$  dem Bisektor zwischen den Punkten  $p$  und  $a$ . Es gilt:

$$B(p, l) \cap H_a = B(p, a) \cap H_a \quad (2.1)$$

Analog gilt die Aussage entsprechend für den Bisektor auf  $H_b$ .

Man beachte, dass auch  $B(p, a) \cap H_a = \emptyset$  gelten kann.



Es bleibt der Streifen von  $l$  zu untersuchen.

Ist  $g$  die Gerade durch  $l$ , so ist der Bisektor von  $p$  und  $g$  die Menge  $B(p, g) = \{\xi \in \mathbb{R}^2 \mid d_e(\xi, p) = d_e(\xi, g)\}$ . Diese Menge ist die Parabel  $\gamma_{p,g}$  mit Brennpunkt  $p$  und Leitlinie  $g$ . Da  $l \subset g$  ist  $B(p, l) \cap S(l) \subset \gamma_{p,l}$ . Man beachte den Sonderfall für  $p \in g \setminus l$ . In diesem Fall ist  $\gamma_{p,l} = \emptyset$  und der Bisektor  $B(p, l)$  eine Gerade in einer der Halbebenen.

Auf jedem der drei Bereiche  $H_a, H_b$  und  $S_l$  ist der Bisektor also eine Kurve. Diese Kurven sind zusammenhängend, da sie auf den Schnittgeraden  $h_a$  bzw.  $h_b$  die gleichen Endpunkte haben. Damit können wir zusammenfassend folgendes Lemma formulieren:

**Lemma 2.2.** *Sei  $l = \overline{ab} \subset \mathbb{R}^2$  ein Liniensegment und  $g$  die Gerade mit  $l \subset g$ . Weiter sei  $p \notin g$  ein Punkt. Dann ist der Bisektor  $B(p, l)$  eine Kurve, die aus einem Parabelsegment und zwei Halbgeraden besteht. Das Parabelstück hat den Brennpunkt  $p$ , die Leitlinie  $g$  und verläuft im Streifen von  $l$ . Außerhalb des Streifens bilden die Mittelsenkrechten der Endpunkte  $a$  und  $b$  von  $l$  mit dem Punkt  $p$  den Bisektor.*

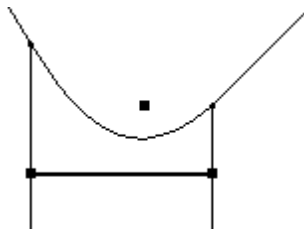


Abbildung 2.2: Der Bisektor von einem Punkt und einem Liniensegment

Es verbleibt noch der Sonderfall, wenn  $p$  auf  $g$  liegt.

$p \in \overset{\circ}{l}$  : Der Bisektor ist die Senkrechte auf  $l$  durch  $p$ .

$p \in \{a, b\}$  : Der Bisektor ist die Halbebene  $H_a$  bzw.  $H_b$ .

$p \in g \setminus l$  : Der Bisektor ist die Mittelsenkrechte zwischen  $p$  und dem nächsten Endpunkt von  $l$ .

Besteht das Liniensegment  $l$  nur aus einem Punkt, so ist der Bisektor die Mittelsenkrechte zwischen  $p$  und  $l$ . Man kann diesen Fall so interpretieren, dass das Parabelstück des Bisektors nur aus dem Mittelpunkt zwischen  $p$  und  $l$  besteht.

### 2.1.3 Bisektor zwischen disjunkten Liniensegmenten

Wie im vorherigen Abschnitt teilen wir die Ebene in Regionen auf, auf denen der Bisektor einen bestimmten Verlauf nimmt. Das Zusammenfügen der Bereiche ergibt dann wieder, dass der Bisektor eine Kurve ist. Bevor wir jedoch damit beginnen, formulieren wir folgendes Lemma.

**Lemma 2.3.** *Seien  $k, l \subset \mathbb{R}^2$  zwei disjunkte Liniensegmente. Weiter sei  $h$  eine Halbgerade, die von  $l$  beginnt und senkrecht zu  $l$  liegt. Dann hat der Bisektor  $B(l, k)$  höchstens einen Punkt mit  $h$  gemeinsam.*

*Beweis.*

Der Widerspruchsbeweis erfolgt über die Dreiecksungleichung der Metrik.

Annahme: Es existieren zwei Punkte  $q, p \in h \cap B(l, k)$  mit  $d_e(q, l) > d_e(p, l)$ .

Da  $p, q$  auf dem Bisektor liegen gilt

$$d_e(q, k) > d_e(p, k) \tag{2.2}$$

Weiter sei  $l_p$  der Lotpunkt von  $p$  und  $q$  auf  $l$ , und  $k_p$  der Fußpunkt von  $p$  auf  $k$ . Es gilt:

$$d_e(q, l) = d_e(p, l) + d_e(p, q) \quad | \quad p, q \text{ auf } g \tag{2.3}$$

$$= d_e(p, k) + d_e(p, q) \quad | \quad p \text{ auf Bisektor} \tag{2.4}$$

$$= d_e(p, k_p) + d_e(p, q) \quad | \quad \text{Def. von } k_p \tag{2.5}$$

$$\geq d_e(q, k_p) \quad | \quad \text{Dreiecksungleichung} \tag{2.6}$$

$$\geq d_e(q, k) \quad | \quad k_p \in k \tag{2.7}$$

$$= d_e(q, l) \quad | \quad q \text{ auf Bisektor} \tag{2.8}$$

Es gilt also die Gleichheit aller Zeilen. Insbesondere nach (2.6) ist  $k_p$  Fußpunkt von  $q$  auf  $k$  und damit  $d_e(q, k_p) = d_e(p, q) + d_e(p, k_p)$ . Die Punkte  $p, q, k_p$  liegen auf einer Geraden. Nach Voraussetzung liegen  $p$  und  $q$  aber auch auf  $h$ . Da  $d_e(p, k_p) = d_e(p, l_p)$  und  $d_e(q, k_p) = d_e(q, l_p)$ , folgt  $p = q$  oder  $l_p = k_p$ . Die Liniensegmente sind als disjunkt vorausgesetzt; es bleibt  $p = q$  übrig, was aber im Widerspruch zu unserer Annahme steht. Es gilt somit die Aussage des Lemmas.  $\square$

**Bemerkung.** Die gleiche Aussage gilt auch für Halbgeraden von  $k$  aus.

Es folgt nun die Zerlegung von  $\mathbb{R}^2$  in Bereiche, die durch die Streifen der Liniensegmente entstehen. Auf diesen Bereichen ist der Bisektor eine Kurve. Die Kurvenstücke der Bereich sind auf der gesamten Ebene stetig verbunden. Es gilt:

**Lemma 2.4.** *Seien  $k, l \subset \mathbb{R}^2$  zwei disjunkte Liniensegmente. Dann ist der Bisektor eine Kurve.*

*Beweis.*

Seien also  $l = \overline{ab}$  und  $k = \overline{cd}$  zwei disjunkte Liniensegmente in  $\mathbb{R}^2$ .  $l$  zerlegt die Ebene in die Bereiche  $H_a, S_l, H_b$ .  $k$  zerlegt die Ebene in die Bereiche  $H_c, S_k, H_d$ . Legt man die Zerlegungen übereinander, so ergeben sich drei mögliche Kombinationen:

- 1) Schnitt von zwei Halbebenen,
- 2) Schnitt der Streifen,
- 3) Schnitt zwischen einer Halbebene und einem Streifen.

Man beachte, dass auch hier die Bereiche durch die senkrechten Geraden auf den Endpunkten begrenzt werden.

zu 1) Für die Halbebenen  $H_a$  und  $H_d$  gilt:

$$B(k, l) \cap [H_a \cap H_d] = B(a, d) \cap [H_a \cap H_d]$$

Wenn der Bisektor auf dem Schnitt der Halbebenen existiert, dann entspricht er dort der Mittelsenkrechten der entsprechenden Endpunkte  $a$  und  $d$ . Der Bisektor ist damit eine Gerade oder Halbgerade. Ist er eine Halbgerade, so beginnt er an einer der Grenzgeraden. Entsprechendes gilt auch für die anderen möglichen Kombinationen der Halbebenen.

zu 2) Seien  $g, g' \subset \mathbb{R}^2$  die zwei Geraden mit  $l \subset g$  und  $k \subset g'$ . Gilt  $g = g'$ , so gilt  $S_l \cap S_k$ , weil  $k$  und  $l$  disjunkt sind. Schneiden sich  $g$  und  $g'$ , so besteht der Bisektor  $B(g, g')$  aus den Winkelhalbierenden der Geraden. Sind die Geraden parallel, so ist  $B(g, g')$  die Mittellinie. In beiden Fällen besteht  $B(g, g')$  aus Geraden. Für  $l \subset g$  und  $k \subset g'$  folgt also

$$B(k, l) \cap [S_l \cap S_k] = B(g, g') \cap [S_l \cap S_k].$$

Der Bisektor besteht somit auch aus Stücken von Geraden. Diese Geradenstücke verlaufen zwischen den Grenzgeraden der Streifen. Die Winkelhalbierenden der Geraden treffen sich im Schnittpunkt der Geraden. Das bedeutet, dass der Bisektor der Liniensegmente (im Schnittbereich der Streifen) auch nur dann eine Verzweigung haben kann, wenn sich die Liniensegmente schneiden. Dieser Fall wird später behandelt.

zu 3) Sei  $H_a$  eine Halbebene von  $l$  und  $S_k$  der Streifen von  $k$ . In  $H_a$  gilt  $d_e(z, l) = d_e(z, a)$  für alle  $z \in H_a$ . Für den Bisektor auf  $H_a \cap S_k$  folgt damit:

$$B(l, k) \cap [H_a \cap S_k] = B(a, k) \cap [H_a \cap S_k]$$

Nach 2.1.2 ist  $B(a, k)$  ein Parabelsegment, das zwischen den Grenzgeraden des Streifens verläuft.

Wir wissen nun, dass der Bisektor von zwei Liniensegmenten aus Linien, Parabelsegmenten und Halbgeraden besteht. Hat ein Bereich einen Bisektor, so endet dieser mit einem Punkt  $p$  auf einer Grenzgeraden eines Streifens.  $p$  als Teil des Bisektors gehört bereits zu einem anderen Bereich, woraus folgt, dass der Bisektor auch dort verlaufen muss. Die beiden Teile des Bisektors sind im Punkt  $p$  stetig verbunden. Da  $l$  und  $k$  disjunkt sind, kann  $B(k, l)$  keine Abzweigung haben. Der Bisektor ist somit eine Kurve.  $\square$

Wir fassen das Ergebnis in einem Satz zusammen.

**Satz 2.5.** *Seien  $l = \overline{ab}$  und  $k = \overline{cd}$  zwei disjunkte Liniensegmente in der Ebene. Dann ist der Bisektor  $B(k, l)$  eine Kurve aus maximal sieben Teilstücken. Die einzelnen Teilstücke sind Halbgeraden, Liniensegmente und Parabelstücke.*

*Beweis.*

Im vorherigen Lemma 2.4 wurde gezeigt, dass der Bisektor eine Kurve aus Geradenstücken und Parabelstücken ist. Im Beweis zu diesem Lemma wurde zusätzlich gezeigt, dass sich der Verlauf des Bisektors nur an den Grenzgeraden der Streifen ändert. Zu zeigen bleibt die maximale Anzahl.

Liegen  $l$  und  $k$  auf einer Geraden, so ist der Bisektor die Mittelsenkrechte der benachbarten Endpunkte, also eine Gerade. Von nun an liegen  $l$  und  $k$  liegen nicht auf einer Geraden. Dann ist die konvexe Hülle der Endpunkte  $ch(a, b, c, d)$  ein Dreieck oder Viereck aus den Endpunkten  $a, b, c, d$ . Da sich nach Voraussetzung  $k$  und  $l$  nicht schneiden, ist  $k$  oder  $l$  Kante der konvexen Hülle; ohne Einschränkung sei  $l$  eine solche Kante.

Wir betrachten nun die vier Grenzgeraden der Streifen von  $l$  und  $k$  und spalten sie in Halbgeraden auf, die an den Endpunkten der Liniensegmente beginnen und senkrecht zu diesen liegen. Nach Lemma 2.3 hat jede dieser acht Halbgeraden höchstens einen Punkt mit dem Bisektor  $B(k, l)$  gemeinsam.

$l$  ist Kante der konvexen Hülle. Damit gibt es eine Seite von  $l$  - eine Halbebene  $\mathcal{L}$  mit  $l$  als Teil des Randes - in der alle Punkte näher an  $l$  als an  $k$  liegen. Zwei der Grenzhalfgeraden von  $l$  verlaufen in  $\mathcal{L}$ , wodurch diese den Bisektor  $B(k, l)$  nicht schneiden können. Es verbleiben also sechs Halbgeraden, die den Bisektor höchstens einmal schneiden. Damit hat der Bisektor höchstens sieben Teilabschnitte.  $\square$

**Bemerkung.** Die Grenze von sieben Teilstücken ist scharf. Man betrachte das Beispiel, siehe Abbildung 2.3:

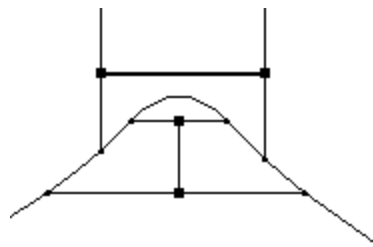


Abbildung 2.3: Bisektor aus sieben Teilstücken

Sind sogar beide Kanten im Rand der konvexen Hülle, so schneiden - auf Grund der gleichen Überlegung - zwei Halbgeraden von  $k$  ebenfalls nicht den Bisektor. Damit kann der Bisektor  $B(k, l)$  nur vier Halbgeraden passieren, wodurch sich die Anzahl seiner Teilstücke auf fünf reduziert.

### 2.1.4 Bisektor nichtdisjunkter Liniensegmente

Im vorherigen Abschnitt wurden die Liniensegmente als disjunkt vorausgesetzt und gezeigt, dass der Bisektor eine Kurve ist. Diese schöne Eigenschaft bewirkt, dass das aus Teilen von Bisektoren zusammengesetzte Voronoi-Diagramm von disjunkten Liniensegmenten als geometrischer Graph dargestellt werden kann, was für die algorithmische Berechnung eine erhebliche Erleichterung ist.

Der Bisektor von Liniensegmenten mit gemeinsamen Punkten kann aber auch eine Fläche sein. Die entsprechenden Sonderfälle werden in diesem Abschnitt behandelt. Diese Fälle sind nicht unwesentlich, was das Beispiel von Polygonzügen zeigt. Welche möglichen Strategien zur Bearbeitung dieser Sonderfälle es gibt, wird in einem späteren Abschnitt besprochen.

Wir behandeln drei Fälle.

- 1) Die offenen Liniensegmente schneiden sich in einem Punkt,
- 2) Der Endpunkt eines Segments liegt auf dem anderen Segment,
- 3) Die Liniensegmente haben einen gemeinsamen Endpunkt,
- 4) Die Liniensegmente haben ein gemeinsames Teilsegment.

#### Bisektor sich schneidender Liniensegmente

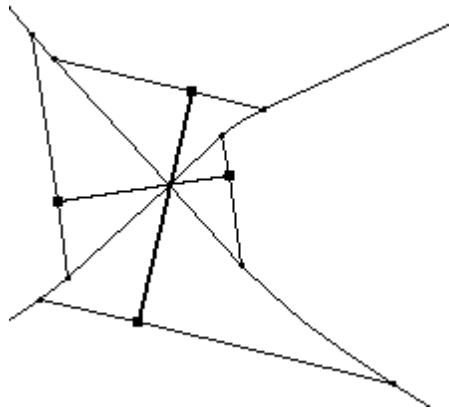


Abbildung 2.4: Bisektor sich schneidender Segmente

Sei  $z$  der Schnittpunkt der beiden Liniensegmente  $l$  und  $k$ , d.h.  $\{z\} = \overset{\circ}{l} \cap \overset{\circ}{k}$ .

Weiter seien  $g, h$  zwei Geraden, die die Segmente  $l$  und  $k$  enthalten, also  $l \subset g$  und  $k \subset h$ .

Im Schnittbereich der beiden Streifen  $S_l$  und  $S_k$  stimmt der Bisektor mit dem Bisektor der beiden Geraden  $g$  und  $h$  überein, die sich in  $z$  schneiden. Auf dem Schnittbereich wird der  $B(l, k)$  durch die Winkelhalbierenden bestimmt. Außerhalb des Schnittbereichs werden diese Winkelhalbierenden fortgesetzt mit Parabelstücken (im Bereich von Streifen und Halbebenen) und Halbgeraden (Im Bereich zweier Halbebenen) analog dem Beweis zu Lemma 2.4. Als Ergebnis formulieren wir folgendes Lemma:

**Lemma 2.6.** *Seien  $l, k$  zwei Liniensegmente mit  $\{z\} = \overset{\circ}{l} \cap \overset{\circ}{k}$ . Dann besteht der Bisektor  $B(k, l)$  aus zwei Kurven, die sich in  $z$  schneiden. Jede dieser Kurven besteht aus maximal fünf Teilstücken:*

- (i) *Eine Winkelhalbierende durch  $z$  auf  $S_l \cap S_k$ ,*
- (ii) *Bis zu zwei Parabelstücken, die entsprechenden Bisektoren zwischen Endpunkt und Liniensegment.*
- (iii) *Zwei Halbgeraden als Bisektoren der Endpunkte.*

### Endpunkt eines Segmentes auf dem anderen Segment

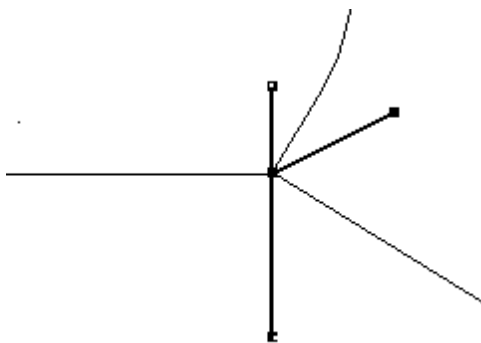


Abbildung 2.5: Ein Segmentende liegt auf dem anderen Segment.

Betrachten wir nun den Spezialfall, dass ein Endpunkt eines Liniensegments im Inneren des anderen Segments liegt. Sei also  $l = \overline{ab}$  und  $\{a\} = l \cap \overset{\circ}{k}$ .  $l$  und

$k$  schließen zwei Winkel ein. Die Winkelhalbierenden bilden auf dem Schnitt der Streifen der Segmente wiederum die Bisektoren, die außerhalb dieses Schnittbereichs entsprechend fortgesetzt werden. Speziell zu betrachten ist die Halbgerade, die von  $a$  beginnt, senkrecht zu  $k$  und gegenüber von  $l$  liegt. Diese Halbgerade  $h$  ist Teil des Bisektors von  $k$  und  $l$ , da die Punkte von  $h$  als Fußpunkt auf  $k$  den Punkt  $a$  haben, und damit den gleichen Abstand zu  $k$  und zu  $l$  haben.

### Bisektor von Liniensegmenten mit gemeinsamen Endpunkt

Seien  $l = \overline{ab}$  und  $g = \overline{ac}$  zwei Liniensegmente, die nicht auf der gleichen Geraden liegen und mit  $\{a\} = l \cap k$ .

Die Streifenzerlegungen der Segmente bezeichnen wir mit  $(L_a, L_b, S_l)$  und

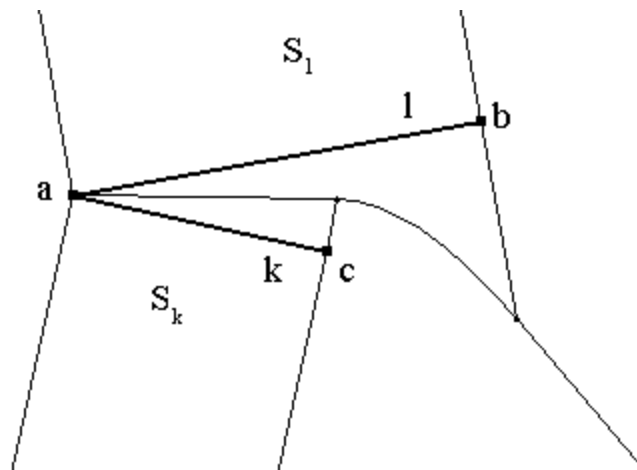


Abbildung 2.6: Segmente mit gemeinsamen Endpunkt

$(K_a, K_c, S_k)$ . Da die Segmente nicht auf einer Geraden liegen, schneiden sich die beiden Streifen  $S_l$  und  $S_k$ . Auf diesem Schnitt entspricht der Bisektor wiederum der Winkelhalbierenden der Segmente. Sei weiter o.E.  $k$  länger als  $l$ , so wird die Winkelhalbierende auf  $L_b \cap S_k$  mit einem Parabelstück  $\gamma_{b,k}$  fortgesetzt, das wiederum auf  $L_b \cap K_c$  in eine Halbgerade übergeht.

Betrachten wir nun  $L_a \cap K_a$ . Alle Punkte dieser Fläche haben  $a$  als Fußpunkt zu  $k$  und  $l$ . Damit sind sie alle ein Teil des Bisektors. Der Bisektor  $B(k, l)$  ist also keine Kurve. Wir fassen zusammen:



**Lemma 2.7.** *Seien  $l = \overline{ab}$  und  $g = \overline{ac}$  zwei Liniensegmente, die nicht auf der gleichen Geraden liegen und mit  $\{a\} = l \cap k$ . Seien weiter  $(L_a, L_b, S_l)$  und  $(K_a, K_c, S_k)$  die entsprechenden Streifenzerlegungen. Dann besteht der Bisektor aus einer Kurve und einer Fläche. Die Kurve beginnt in  $a$  und verläuft durch  $(L_b \cup S_l) \cap (K_c \cup S_k)$ ; die Bisektorfläche ist  $L_a \cap K_a$ .*

Im Algorithmus später wird das Problem der Bisektorflächen elegant umgangen, indem die Endpunkte der Segmente eine eigene Region erhalten. Die Bisektorfläche ist dann gerade die Region des Endpunktes, den die beiden Segmente gemeinsam haben.

Ein Sonderfall ergibt sich, wenn  $l$  und  $k$  auf einer Geraden liegen. Dann ist der Bisektor die Senkrechte durch den gemeinsamen Punkt  $a$ . Die Gerade ist aber ebenfalls der Schnitt der Halbebenen  $L_a$  und  $K_a$ .

### Bisektor sich überlagernder Liniensegmente

Überlagern sich zwei Liniensegmente  $k$  und  $l$ , so bildet ihr Schnitt ein Liniensegment  $s$ , das durch zwei Endpunkte der Segmente definiert wird. Insbesondere kann dieses Schnittsegment  $s$  mit  $k$  oder  $l$  übereinstimmen. Der Streifen  $S_s$  bildet dann den Bisektor  $B(k, l)$ , der in diesem Fall auch eine Fläche bildet. Im besonderen Fall, dass  $k \subset l$  und  $l, k$  einen gemeinsamen Endpunkt  $a$  haben, gehört sogar die entsprechende Halbebene  $H_a$  zum Bisektor.

## 2.2 Voronoi-Regionen

Der vorherige Abschnitt behandelte den Bisektor zweier Liniensegmente, also Punkte, die zu beiden Segmenten den gleichen Abstand haben. Nun behandeln wir die Voronoi-Region eines Segments, also die Punkte, die einem bestimmten Liniensegment am nächsten liegen.

In diesem Abschnitt sei  $\mathcal{S} = \{s_1, \dots, s_n\}$  eine endliche Menge von Liniensegmenten  $s_i \subset \mathbb{R}^2$ .

**Definition 2.8.** Sei  $s \in \mathcal{S}$  ein Liniensegment. Die *Voronoi-Region von  $s$*  ist die Menge

$$VR(s) = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid \forall s_i \in \mathcal{S} \setminus \{s\} : d_e(z, s) < d_e(z, s_i)\}. \quad (2.9)$$

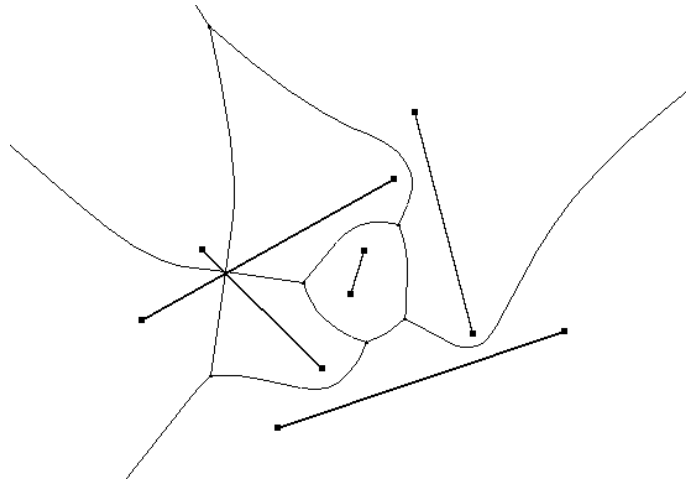


Abbildung 2.7: Voronoi-Diagramm von Liniensegmenten

**Bemerkung.** Aus der Definition folgt unmittelbar, dass die Voronoi-Regionen verschiedener Liniensegmente disjunkt sind.

Wir beginnen mit einer elementaren Eigenschaft der Voronoi-Regionen. Betrachtet man den Rand einer Voronoi-Region als Wand, so kann man von jedem Punkt in der Voronoi-Region ein Teil des Segments sehen, d.h. der direkte Weg wird durch keine Wand verstellt. Diese Aussage beinhaltet das folgende Lemma.

**Lemma 2.9.** Sei  $s \in \mathcal{S}, p \in \mathbb{R}^2$  und  $s_p$  Fußpunkt von  $p$  auf  $s$ , dann gilt:

$$p \in VR(s) \Rightarrow \overline{ps_p} \subset VR(s). \quad (2.10)$$

*Beweis.*

Da  $d_e(p, s) = d_e(p, s_p)$  gilt unmittelbar  $s_p \in VR(s)$ . Sei nun  $z \in \overline{ps_p}$  beliebig gewählt.

Annahme:  $z \notin VR(s)$ , d.h.

$$\exists l \in \mathcal{S} : l \neq s \text{ und } d_e(s, z) \geq d_e(l, z) \quad (2.11)$$

Es gilt aber

$$d_e(s, p) = d_e(s_p, p) \quad \text{Definition von } s_p \quad (2.12)$$

$$= d_e(s_p, z) + d_e(z, p) \quad | \text{ da } z \in \overline{ps_p} \quad (2.13)$$

$$\geq d_e(l, z) + d_e(z, p) \quad | \text{ nach 2.11} \quad (2.14)$$

$$\geq d_e(l, p) \quad \text{Widerspruch zur Vor. } p \in VR(s) \quad (2.15)$$

Da die Annahme zum Widerspruch führt, gilt  $z \in VR(s)$  und damit  $\overline{ps_p} \subset VR(s)$ .  $\square$

Nun betrachten wir die Frage nach den Zusammenhang von Voronoi-Regionen. Die Abbildung 2.7 zeigt zwei sich schneidende Segmente. Ihre Regionen sind nicht zusammenhängend. Es gibt jedoch eine Eigenschaft der Liniensegmente, die den Zusammenhang ihrer Voronoi-Region sichert, was der folgende Satz zeigt.

**Satz 2.10.** *Sei  $\mathcal{S} := \{s_1, \dots, s_n\}$  eine endliche Menge von Liniensegmenten und für  $s \in \mathcal{S}$  sei eine Menge definiert durch*

$$\tilde{s} := s \cap VR(s) = \{z \in s \mid \forall r \in \mathcal{S} \setminus \{s\} : z \notin r\} .$$

*Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (i)  $\tilde{s}$  ist zusammenhängend,
- (ii) Die Voronoi-Region  $VR(s)$  ist zusammenhängend.

Der Zusammenhang der Voronoi-Region lässt sich somit auf den Zusammenhang der Punkte des Liniensegments zurückführen, die keine Schnittpunkte mit anderen Liniensegmenten sind. Wir kommen zum Beweis des Satzes.

*Beweis.*

(i)  $\Rightarrow$  (ii) : Seien  $p, q \in VR(s)$  beliebig gewählt, dann folgt nach Lemma 2.9, dass  $\overline{ps_p}$  und  $\overline{qs_q}$  in  $VR(s)$  liegen. Nach (i) gilt weiter  $\overline{ps_p s_q} \subset \tilde{s} \subset VR(s)$ . Damit liegt der gesamte Polygonzug  $\overline{ps_p s_q}$  in  $VR(s)$ . Da  $p, q$  beliebig gewählt wurden, ist  $VR(s)$  zusammenhängend.

(ii)  $\Rightarrow$  (i) : Annahme,  $\tilde{s}$  sei nicht zusammenhängend, d.h.

$$\exists p_1, p_2 \in \tilde{s} \exists z \in \overline{p_1 p_2} \setminus \tilde{s}. \quad (2.16)$$

$p_1$  und  $p_2$  können auf  $s$  nicht verbunden werden, da sie zu beiden Seiten von  $z$  liegen. Da sie aber in  $\tilde{s} \subset VR(s)$  liegen und  $VR(s)$  nach Voraussetzung zusammenhängend ist, können  $p_1$  und  $p_2$  in  $VR(s)$  verbunden werden. Die Kurve, die dies ermöglicht, muss die Gerade  $g$  schneiden, die senkrecht zu  $s$  liegt und durch  $z$  verläuft. Sei  $q$  dieser Schnittpunkt. Da  $q$  auch in  $VR(s)$  liegt, gilt  $\overline{qs_q} \subset VR(s)$ . Insbesondere der Fußpunkt von  $q$  liegt in  $VR(s)$ . Der Fußpunkt ist aber  $z$ . Da  $z \in \overline{p_1 p_2} \subset s$ , folgt  $z \in \tilde{s} = s \cap VR(s)$ , was zu einem Widerspruch mit (2.16) führt. Da die Annahme falsch ist, ist  $\tilde{s}$  zusammenhängend.  $\square$

Die Bedeutung des Satzes folgt unmittelbar aus den beiden folgenden Lemmata.

**Lemma 2.11.** *Sei  $\mathcal{S} := \{s_1, \dots, s_n\}$  eine endliche Menge von disjunkten Liniensegmenten. Dann sind die Voronoi-Regionen  $VR(s_i), i = 1, \dots, n$  zusammenhängend.*

*Beweis.*

Trivial, da für die disjunkte Liniensegmente  $s \subset VR(s)$  gilt.  $\square$

**Lemma 2.12.** *Sei  $\mathcal{S} := \{s_1, \dots, s_n\}$  eine endliche Menge von Liniensegmenten. Für ein Liniensegment  $s = \overline{ab} \in \mathcal{S}$  gelte die Bedingung*

$$\mathring{s} \subset VR(s).$$

*Dann ist  $VR(s)$  zusammenhängend.*

*Beweis.*

Zu  $\mathring{s}$  können höchstens noch die Endpunkte  $a$  und  $b$  hinzukommen, um  $s \cap VR(s)$  zu bilden. Da  $\mathring{s} = \mathring{s} \cap VR(s)$  zusammenhängend ist, ist auch  $s \cap VR(s)$  zusammenhängend. Nach Satz 2.10 folgt somit, dass  $VR(s)$  zusammenhängend ist.  $\square$

Lemma 2.11 sichert den Zusammenhang von Voronoi-Regionen von disjunkten Liniensegmenten. Lemma 2.12 sichert den Zusammenhang von Voronoi-Regionen von Liniensegmenten, die einen Polygonzug bilden.

Ist eine Voronoi-Region zusammenhängend, so ist sie deshalb nicht notwendiger Weise konvex, wie es im klassischen Voronoi-Diagramm der Fall ist. Die Konvexität geht verloren, da die Voronoi-Regionen von Liniensegmenten durch Parabelstücke begrenzt werden können (vgl. Abbildung 2.7). Die Voronoi-Regionen sind i.A. auch nicht sternförmig.

Neben dem Zusammenhang und der Konvexität von Voronoi-Regionen ist auch deren Beschränktheit von Interesse. Dies wollen wir abschließend untersuchen.

Besteht die Menge  $\mathcal{S} = \{s\}$  nur aus einem Element, so ist die Voronoi-Region von  $s$  die gesamte Ebene  $\mathbb{R}^2$  und damit unbeschränkt. Abbildung 2.7 zeigt, dass die Voronoi-Region des mittleren Segments beschränkt ist. Allgemein gilt folgender Zusammenhang:

**Lemma 2.13.** *Sei  $\mathcal{K} := \text{ch}(\mathcal{S})$  die konvexe Hülle aller Segmente. Dann sind folgende zwei Aussagen für ein  $s \in \mathcal{S}$  äquivalent:*

- (i)  *$VR(s)$  ist unbeschränkt,*
- (ii)  *$\exists p \in (s \cap \partial\mathcal{K}) \forall s' \in \mathcal{S} \setminus \{s\} : p \notin s'$ .*

Die Aussage des Lemmas in Worten: Eine Voronoi-Region ist genau dann unbeschränkt, wenn das Segment einen Punkt auf dem Rand der konvexen Hülle hat, der zu keinem anderen Segment gehört. Dass dieser Fall ausgeschlossen werden muss, zeigt das Beispiel in Abbildung 2.8. Die Voronoi-Region des mittleren, vertikalen Segments ist beschränkt, obwohl die Endpunkte auf der konvexen Hülle liegen.

Wir beweisen nun das Lemma.

*Beweis.*

(i)  $\Rightarrow$  (ii): Die Voronoi-Region von  $s$  sei unbeschränkt. Damit ist ihr Rand auch unbeschränkt. Für diesen Rand kann also nur eine Halbgerade in Frage kommen, da mögliche Parabelstücke beschränkt sind. Eine solche Halbgerade  $g$  ist ein Bisektor zwischen einem Endpunkt  $a$  von  $s$  und einen Endpunkt  $b$  eines anderen Liniensegments, wobei  $a = b$  gelten kann. Ist  $z$  ein Punkt auf  $g$ , so kann um  $z$  ein Kreis gezogen werden mit Radius  $r = d_e(z, a) = d_e(z, b)$ . Innerhalb der offenen Kreisscheibe  $C_r(z)$  kann kein Punkt eines Liniensegments aus  $\mathcal{S}$  liegen. Da  $g$  eine Halbgerade ist, kann  $z$  ins Unendliche wandern, d.h.  $r \rightarrow \infty$ . Damit konvergiert die offene Kreisscheibe  $C_r(z)$  gegen eine offen

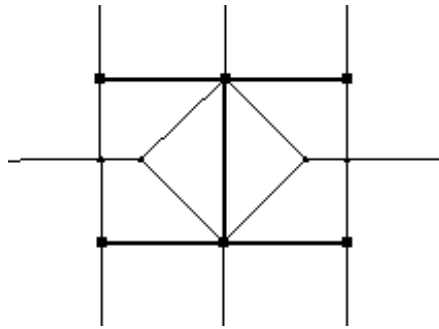


Abbildung 2.8: Beschränkte Voronoi-Region eines Segments mit Endpunkten auf der konvexen Hülle.

Halbebene  $H$ . Weil  $H$  kein Liniensegment von  $\mathcal{S}$  enthält, gilt  $H \cap \mathcal{K} = \emptyset$ . Nach Konstruktion der Kreise müssen  $a$  und  $b$  auf dem Rand der konvexen Hülle liegen. Gilt bereits  $a \notin s'$  für alle  $s' \neq s$ , so sind wir fertig.

$a$  sei daher auch Endpunkt eines anderen Segments, wodurch der Rand von  $VR(s)$  auch der Rand einer Bisektorfläche ist. Der Bisektor ist somit eine Grenzgerade des Streifens von  $s$ . Ist  $z$  ein Punkt des Bisektors, so ist in einer  $\varepsilon$ -Umgebung um  $z$  ein Punkt  $c \in VR(s)$ . Dieser kann innerhalb der Region mit seinem Fußpunkt  $p$  auf  $s$  verbunden werden, der auch der konvexen Hülle liegt.  $p$  liegt in  $VR(s)$ , wodurch  $p$  kein Punkt eines anderen Liniensegments sein kann.

(ii)  $\Rightarrow$  (i): Sei also  $p \in s$  gegeben, wobei  $p$  zu keinem anderen Liniensegment gehört und auf dem Rand der konvexen Hülle liegt. Als Punkt des Randes der konvexen Hülle gibt es eine Halbgerade  $g$ , die in  $p$  beginnt und für deren Punkte  $p$  näher liegt als alle anderen Punkte aus  $\mathcal{K}$ . Insbesondere für die Liniensegmente, die alle in  $\mathcal{K}$  liegen. Damit liegt  $g$  in der Voronoi-Region von  $s$ . Da  $g$  eine Halbgerade ist, ist  $VR(s)$  unbeschränkt.  $\square$

Abschließend befassen wir uns mit der Beziehung der Voronoi-Region zu den Bisektoren. Sei daher  $G$  eine Zusammenhangskomponente der Voronoi-Region  $VR(s)$ . Wir betrachten nun den Rand von  $G$ ; aus der Definition der Voronoi-Regionen folgt sofort:

**Lemma 2.14.** *Ist  $p$  ein Punkt auf dem Rand von  $G$ , so existiert ein Bisektor  $B(s, s')$  mit  $p \in B(s, s')$ .*

$G$  wird also durch die Bisektoren begrenzt. Der Weg  $\partial G$  besteht somit aus Teilstücken der Bisektoren, wobei ein einzelner Bisektor mehrere nicht zusammenhängende Teilstücke zu  $\partial G$  beitragen kann.

## 2.3 Das Voronoi-Diagramm

Nachdem wir Bisektoren und Voronoi-Regionen untersucht haben, betrachten wir nun das Voronoi-Diagramm. Das klassische Voronoi-Diagramm kann über verschiedene äquivalente Bedingungen<sup>1</sup> definiert werden [8]. Da die Bisektoren von Liniensegmenten Flächen beinhalten können, sind diese Bedingungen für das Voronoi-Diagramm von Liniensegmenten nicht äquivalent.

Daher kann man ein Voronoi-Diagramm von Liniensegmenten unterschiedlich definieren. Die Definitionen unterscheiden sich in der Behandlung der Bisektorflächen. Definiert man das Diagramm durch die Ebene  $\mathbb{R}^2$  ohne die Voronoi-Regionen der Segmente, sind die Bisektorflächen Teilmengen des Diagramms. Das Diagramm ist dann kein Graph aus Knoten und Kanten.

Möchte man das Voronoi-Diagramm als Graphen darstellen, so muss man die Bisektorflächen auflösen. Dies kann auf unterschiedliche Weise erfolgen. Da die Flächen vor allem an gemeinsamen Endpunkten von Segmenten auftauchen, kann man sie durch die Winkelhalbierende aufteilen. Diese Winkelhalbierende entspricht auch einem Grenzprozess: Zieht man die beiden Segmente mit gemeinsamen Endpunkt um ein  $\varepsilon$  auseinander, so entspricht der Bisektor, dieser dann diskjunkten Segmente, der Winkelhalbierenden.

Eine andere Möglichkeit, die Bisektorflächen aufzulösen, besteht darin, das Voronoi-Diagramm über die Ränder der Voronoi-Regionen zu definieren. Die Bisektorflächen bilden dann eigene Regionen. Diesen Ansatz werden wir verfolgen, da unser Algorithmus den Endpunkten der Segmente eigene Regionen zuordnet. Die Bisektorflächen sind dann gerade die Regionen der gemeinsamen Endpunkte.

Alle Definitionen des Voronoi-Diagramms sind für disjunkte Liniensegmente äquivalent.

---

<sup>1</sup>Definition über den Rand der Voronoi-Regionen oder über  $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup VR(s, \mathcal{S})$ .

**Definition 2.15.** Sei  $\mathcal{S}$  eine endliche Menge von Liniensegmenten, dann definieren wir das Voronoi-Diagramm der Menge  $\mathcal{S}$  durch

$$VD(\mathcal{S}) := \bigcup_{s \in \mathcal{S}} \partial VR(s, \mathcal{S}).$$

Aus der Definition folgt eine einfache Aussage.

**Lemma 2.16.** Sei  $p \in VD(\mathcal{S})$ , dann existieren zwei Liniensegmente  $s_i, s_j \in \mathcal{S}$  mit  $p \in B(s_i, s_j)$ .

*Beweis.*

Sei  $a$  ein Punkt, der auf keinem Bisektor liegt. D.h. es existiert ein Voronoi-Region mit  $a \in VR(s, \mathcal{S})$ . Die Voronoi-Regionen sind offene Mengen und beinhalten somit nicht ihren Rand. Es gilt also  $a \notin \partial VR(s, \mathcal{S})$ .  $a$  kann also nicht Punkt des Voronoi-Diagramms sein.  $\square$

Das Voronoi-Diagramm von Liniensegmenten besteht aus Teilen der Bisektoren oder deren Ränder. Das sind Liniensegmente, Parabelstücke oder Halbgeraden. Sie trennen die einzelnen Regionen. Die Regionen sind die Voronoi-Regionen der Segmente oder die Bisektorflächen.<sup>2</sup>

Das Voronoi-Diagramm bildet somit einen Graphen aus Knoten und Kanten. Einen Knoten kann man dabei formal so definieren, dass jede  $\varepsilon$ -Umgebung des Knotens mindestens drei Regionen schneidet. Die Zusammenhangskomponenten des restlichen Graphen (mit den entsprechenden Endpunkten) bilden dann die Kanten des Graphen.

Wir definieren mit  $\mathcal{V}$  die Menge der Knoten des Voronoi-Diagramms und mit  $\mathcal{E}$  die Menge der Kanten.

Mit  $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$  kann nun direkt ein naiver Algorithmus angegeben werden, der das Voronoi-Diagramm von Liniensegmenten berechnet. Hierzu werden alle Bisektoren zwischen den Liniensegmenten, (bzw. die Ränder der Bisektorflächen) berechnet, und anschließend die überflüssigen Teile entfernt. Für  $n$  Liniensegmente ergibt sich somit eine Schranke für die Laufzeit von  $O(n^2)$ . Für das allgemeine Voronoi-Diagramm von Liniensegmenten ist diese Laufzeit bereits optimal: Schneiden sich zwei Liniensegmente, so ist dieser Schnittpunkt

---

<sup>2</sup>Genauer: die Zusammenhangskomponenten des offenen Kerns der Bisektorflächen



bereits Element des Voronoi-Diagramms. Insbesondere ist dieser Schnittpunkt ein Knoten, wodurch er auf jeden Fall berechnet werden muss. Wählt man nun die  $n$  Liniensegmente so, dass sie sich alle gegenseitig schneiden, müssen  $\frac{1}{2}n(n-1)$  Schnittpunkte berechnet werden.

Damit endet die Untersuchung des allgemeinen Voronoi-Diagramms von Liniensegmenten. Von besonderen Interesse sind die folgenden zwei Spezialfälle: Man kann zum einen disjunkte Liniensegmente voraussetzen, zum anderen kann man Voronoi-Diagramme eines Polygons oder Polygonzuges untersuchen. Algorithmen, die die entsprechenden Voronoi-Diagramme berechnen, benötigen eine Laufzeit von  $O(n \log n)$ .

### 2.3.1 Das Voronoi-Diagramm von disjunkten Liniensegmenten

In den vorangegangenen Abschnitten haben wir festgestellt, dass im Voronoi-Diagramm von Liniensegmenten zwei Probleme auftauchen können. Zum einen können sich berührende Liniensegmente Bisektorflächen erzeugen. Zum anderen ergeben sich durch schneidende Liniensegmente Voronoi-Regionen, die nicht zusammenhängend sind. Diese Probleme kann man vermeiden, indem man sich auf disjunkte Liniensegmente begrenzt, was für die meisten Anwendungen ausreicht. Die Berechnung des Voronoi-Diagramms von disjunkten Liniensegmenten kann in  $O(n \log n)$  Zeit erfolgen [1]. Für entsprechende Algorithmen sind Liniensegmente mit sehr geringem Abstand eine Gefahr bzgl. der numerischen Stabilität.

**Theorem 2.17.** *Sei  $\mathcal{S} = \{s_1, \dots, s_n\}$  eine endliche Menge von disjunkten Liniensegmenten  $s_i \subset \mathbb{R}^2$ . Dann gilt für  $s, s' \in \mathcal{S}$ :*

- (i)  $B(s, s')$  ist eine Kurve,
- (ii)  $VR(s)$  ist zusammenhängend,
- (iii)  $VD(\mathcal{S})$  besteht nur aus Knoten und Kanten.

*Beweis.*

Folgt direkt aus Lemma 2.4 und Satz 2.10. □

**Lemma 2.18.** *Das Voronoi-Diagramm von  $n$  disjunkten Liniensegmenten hat  $O(n)$  Knoten und Kanten. Der Rand einer Voronoi-Region besteht im Mittel aus höchstens sechs Kanten.*

*Beweis.*

Über die einzelnen Bisektoren wissen wir, dass sie aus maximal sieben Teilen bestehen, von den nur Halbgeraden unbeschränkt sind. Diese Eigenschaft überträgt sich auf das Voronoi-Diagramm, d.h. auf die Kanten. Man kann einen Kreis  $\Gamma$  um das Voronoi-Diagramm ziehen, der ausreichend groß ist, um alle signifikanten Elemente des Voronoi-Diagramms (Liniensegmente, Knoten, beschränkte Kanten) zu beinhalten. Die Halbgeraden werden an ihren Schnittpunkten mit  $\Gamma$  abgeschnitten. Die Schnittpunkte werden zu der Knotenmenge, die Teilstücke von  $\Gamma$  zur Kantenmenge hinzugenommen. Damit erhält man ein zusammenhängenden geometrischen Graphen, der (abgesehen von  $\Gamma$ ) mit dem Voronoi-Diagramm übereinstimmt. Sei nun  $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$  der entsprechende geometrische Graph in der Ebene. Für diesen Graph ist die Eulersche Formel anwendbar. Der Graph ist zusammenhängend und es gibt  $n + 1$  Flächen. ( $n$  Liniensegmente und das Äußere von  $\Gamma$ ) Damit ergibt sich:

$$\#(\mathcal{E}) - \#(\mathcal{V}) = n - 1.$$

Da jeder Knoten mindestens den Grad 3 hat, gilt nach 1.11 zusätzlich  $\#(\mathcal{V}) \leq \frac{2}{3} \#(\mathcal{E})$ . Damit ergibt sich die Aussage des Lemmas.  $\square$

### 2.3.2 Das Voronoi-Diagramm eines Polygonzugs

In diesem Abschnitt bildet die Menge  $\mathcal{S}$  wieder eine Menge von Liniensegmenten  $s_i, i = 1, \dots, n$ . Die Liniensegmente bilden jedoch einen kreuzungsfreien Polygonzug, d.h. für  $s_i = \overline{a_i b_i}$  gelte  $b_i = a_{i+1}$ . Als Spezialfall kann der Polygonzug ein einfaches Polygon ( $b_n = a_1$ ) bilden.

**Lemma 2.19.** *Seien  $s_i$  und  $s_{i+1}$  zwei aufeinander folgende Segmente mit  $\angle(s_i, s_{i+1}) \neq \pi$ . Dann beinhaltet das Voronoi-Diagramm  $VD(\mathcal{S})$  eine Bisektorfläche, auf deren Rand der Punkt  $b_i = a_{i+1}$  liegt.*

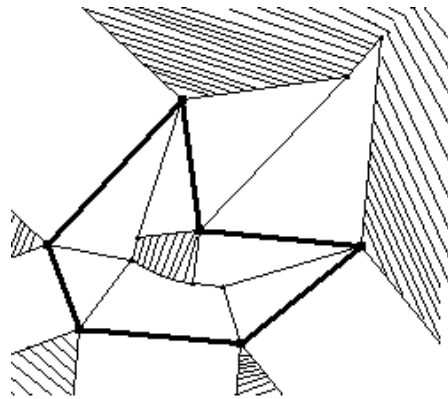


Abbildung 2.9: Voronoi-Diagramm eines Polygons

*Beweis.*

$B(s_i, s_{i+1})$  ist ein Bisektor zweier Segmente mit einem gemeinsamen Endpunkt, die nicht auf einer Geraden liegen. Nach Abschnitt 2.1.4 folgt, dass im gemeinsamen Endpunkt  $b_i$  eine Bisektorfläche als Schnitt entsprechender Halbebenen beginnt. Da  $b_i$  zu keinem anderen Liniensegment gehört, existiert eine  $\varepsilon$ -Umgebung  $U_\varepsilon(b_i)$  um  $b_i$ , in der das Voronoi-Diagramm  $VD(\mathcal{S})$  nur von dem Bisektor  $B(s_i, s_{i+1})$  bestimmt wird. Das bedeutet, dass die Fläche  $B(s_i, s_{i+1}) \cap U_\varepsilon(b_i)$  ein Teil des Voronoi-Diagramms  $VD(\mathcal{S})$  ist.  $\square$

**Theorem 2.20.** *Die Voronoi-Regionen der Kanten eines Polygonzugs sind zusammenhängend.*

*Beweis.*

Die Aussage folgt aus Lemma 2.12, da die Segmente nur die Endpunkte gemeinsam haben können.  $\square$

Bis auf das erste und letzte Liniensegment des Polygonzugs, haben alle Segmente keinen eigenen Endpunkt. Damit wird die Voronoi-Region eines solchen Segments nur durch das Innere des Segments bestimmt.

**Lemma 2.21.** *Sei  $s_i \in \mathcal{S}$  mit  $1 < i < n$  und  $(H_a, H_b, S_i)$  die Streifenzerlegung von  $\mathbb{R}^2$  durch  $s_i$ . Dann gilt  $VR(s_i) \subset S_i$ .*

*Beweis.*

Die Elemente von  $H_a$  haben den Punkt  $a_i$  als Fußpunkt auf  $s_i$ . Damit haben sie aber auch zu  $s_{i-1} = \overline{a_{i-1}a_i}$  höchstens den gleichen Abstand. Somit folgt:  $H_a \cap VR(s_i) = \emptyset$ . Entsprechend gilt auch  $H_b \cap VR(s_i) = \emptyset$ . Damit bleibt  $VR(s_i) \subset S_i$  übrig.  $\square$

**Bemerkung.** Bildet  $\mathcal{S}$  ein Polygon, so gilt das Lemma für alle Liniensegmente.

Ansonsten gilt für das erste und letzte Segment, dass deren Voronoi-Region noch Teile aus den entsprechenden Halbebenen  $H_{a_1}$  und  $H_{b_n}$  beinhalten.

Bei einem Polygonzug mit  $n$  Segmenten haben wir also  $n$  Zusammenhangskomponenten von Voronoi-Regionen. Hinzu kommen noch bis zu  $(n-1)$  (bei einem Polygon  $n$ ) Bisektorflächen. Die Knoten und Kanten schließen diese Flächen ein. Man kann nun durch geeignete Umfassung mit einem Kreis  $\Gamma$  aus diesen Knoten und Kanten einen geometrischen Graphen bilden, auf den die Eulersche Formel 1.11 anwendbar ist. Der Graph ist zusammenhängend; die Anzahl der Flächen ist maximal  $2n$ . Somit ergibt sich:

**Lemma 2.22.** *Das Voronoi-Diagramm eines Polygonzuges mit  $n$  Liniensegmenten hat  $O(n)$  Knoten und Kanten. Der Rand einer Voronoi-Region besteht im Mittel aus höchstens sechs Kanten.*

# Kapitel 3

## Das Laufbandmodell

Als Grundlage dient ein Aufsatz „Voronoi Diagram for the Continuous Model“ von C. Icking, L. Ma und B. Palop [6], in dem erste Untersuchungen durchgeführt wurden. In diesem Kapitel vertiefe ich diese Arbeit.

### 3.1 Einführung

Gegeben sei eine Ebene mit einem unendlichen, geraden Laufband. Ein Fußgänger kann sich in der Ebene frei in alle Richtungen mit einer Geschwindigkeit von 1 bewegen. Das Laufband selbst hat (bezogen zum Fußgänger) eine Geschwindigkeit von  $\delta \geq 0$  in beide Richtungen. Benutzt der Fußgänger das Laufband, das er an jeder Stelle betreten und verlassen kann, so erhöht sich seine Geschwindigkeit um auf  $v := 1 + \delta$ .

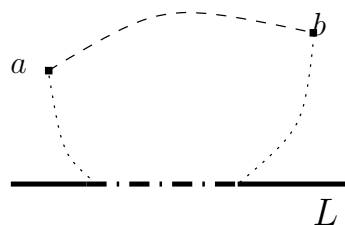


Abbildung 3.1: Laufband

Von Interesse ist nun der schnellste Weg zwischen zwei Punkten; insbesondere, ob es für den Fußgänger sinnvoll ist, das Laufband zu benutzen oder den direkten Weg zu wählen. Es ergeben sich folgende Fragen:

1. Welche Regionen der Ebene sind von einem Punkt  $a$  aus besser zu Fuß zu erreichen, welche Regionen über das Laufband?
2. Wie verläuft der Bisektor zweier Punkte; welche Eigenschaften hat das Voronoi-Diagramm einer Punktmenge?
3. Wie kann man das Voronoi-Diagramm berechnen?

Im Folgenden werden die einzelnen Fragen beantwortet. Interessant ist, dass sich das Voronoi-Diagramm des Laufbandmodells auf ein Voronoi-Diagramm von Liniensegmenten zurückführen lässt.

### 3.1.1 Definition des Laufbandmodells

**Definition 3.1.** Sei  $\mathbb{R}^2$  versehen mit der euklidischen Metrik  $d_e$  gegeben. Weiter sei  $L \subset \mathbb{R}^2$  eine Gerade mit einem Parameter  $v \geq 1$ . Dann nennen wir  $\mathcal{L} := (\mathbb{R}^2, L, v)$  ein Laufbandmodell.

Die Geschwindigkeit des Fußgängers auf einem Weg  $\gamma \subset \mathbb{R}^2$  richtet sich danach, ob und wie lange das Laufband benutzt wird. Da er sich mit der Geschwindigkeit 1 bewegt, benötigt er für einen Weg  $\gamma \subset \mathbb{R}^2 \setminus L$  die Zeit  $\ell(\gamma)$ . Auf  $L$  bewegt sich der Fußgänger mit der Geschwindigkeit  $v$ , wodurch er für einen Weg  $\gamma \subset L$  die Zeit  $\frac{1}{v} \cdot \ell(\gamma)$  benötigt.

Wir definieren:

**Definition 3.2.** Sei  $a, b \in \mathbb{R}^2$  zwei Punkte und  $\Gamma_{ab}$  die Menge aller Wege von  $a$  nach  $b$ . Der Zeitbedarf des Weges  $\gamma \in \Gamma_{ab}$  in  $\mathcal{L}$  ist der Wert der Abbildung  $t : \Gamma_{ab} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$t(\gamma) := \ell(\gamma \setminus L) + \frac{1}{v} \cdot \ell(\gamma \cap L) .$$

**Bemerkung.** Da der Zeitbedarf  $t$  direkt aus der Länge eines Weges abgeleitet wird, folgt unmittelbar  $t(\gamma) = \sum_{i=1}^n t(\gamma_i)$  für eine Zerlegung des Weges  $\gamma$  in Teilwege  $\gamma = \sum_{i=1}^n \gamma_i$ .

Kreuzt der Fußgänger das Laufband ohne es zu benutzen, dann ist der schnellste Weg gleich dem kürzesten Weg, bezogen auf die euklidische Metrik.

**Definition 3.3.** Sei  $\gamma \subset \mathbb{R}^2$  ein Weg mit den Endpunkten  $a$  und  $b$ . Weiter habe  $\gamma$  mit  $L$  höchstens einen Punkt gemeinsam. Dann nennen wir  $\gamma$  einen Fußweg (von  $a$  nach  $b$ ).

**Lemma 3.4.** Für zwei Punkte  $a, b \in \mathbb{R}^2$  gilt:

$$d_e(a, b) = \ell(\overline{ab}) = \min\{\gamma \subset \mathbb{R}^2 \mid \gamma \text{ ist Fußweg von } a \text{ nach } b\}$$

Wir nennen deshalb  $\overline{ab}$  den direkten Fußweg von  $a$  nach  $b$ .

### 3.1.2 Laufbandwege

Neben den Fußwegen gibt es Wege, die über das Band  $L$  verlaufen. Wichtig ist es, die Umwege herauszufiltern.

**Lemma 3.5.** Sei  $\gamma \in \Gamma_{ab}$  ein Weg von  $a$  nach  $b$ . Dann existiert ein Weg  $\tilde{\gamma} \in \Gamma_{ab}$  mit  $t(\tilde{\gamma}) \leq t(\gamma)$  und einer der folgenden Eigenschaften:

- 1)  $\tilde{\gamma}$  ist direkter Fußweg,
- 2)  $\tilde{\gamma}$  ist ein Polygonzug aus drei Teilstücken  $\overline{ap}$ ,  $\overline{pq}$  und  $\overline{qb}$  mit  $\overline{ap} \cap L = \{p\}$ ,  $\overline{qb} \cap L = \{q\}$  und  $\overline{pq} \subset L$ .

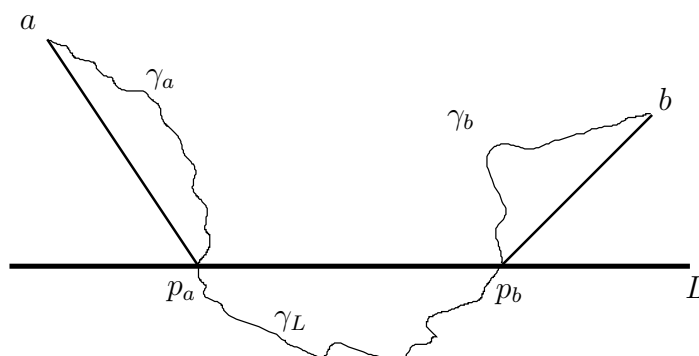


Abbildung 3.2: Polygonzug  $\overline{ap_a p_b b}$  als schnellster Weg

*Beweis.*

Gilt  $\gamma \cap L = \emptyset$  so gilt direkt  $\ell\{\overline{ab}\} \leq \ell\{\gamma\}$ . Sei nun  $\gamma \cap L \neq \emptyset$ , dann zerfällt  $\gamma$  in drei Teilwege  $\gamma_a, \gamma_L, \gamma_b$ , wobei  $\gamma_a$  die Endpunkte  $a$  und  $p_a \in L$  und mit  $L$  nur den Punkt  $p_a$  gemeinsam hat. Analog sei der Punkt  $q_b \in L$  Endpunkt von  $\gamma_b$ . Da  $\gamma_a$  nicht teilweise in  $L$  verläuft und  $\ell(\overline{ap_a}) \leq \ell(\gamma_a)$  gilt  $t(\overline{ap_a}) \leq t(\gamma_a)$ . Entsprechend gilt  $t(\overline{q_b b}) \leq t(\gamma_b)$ . Der Teilweg  $\gamma_L$  hat die Endpunkte  $p_a, q_b \in L$ . Damit gilt aber direkt  $t(\overline{p_a q_b}) \leq \gamma_L$ .

Zusammen ergibt sich ein Laufbandweg  $\tilde{\gamma} = \overline{ap_a} + \overline{p_a q_b} + \overline{q_b b}$  mit  $t(\tilde{\gamma}) \leq t(\gamma)$ .  $\square$

Der schnellste Weg von  $a$  nach  $b$  ist also die direkte Verbindung  $\overline{ab}$  oder ein Polygonzug wie in Lemma 3.5. Unter diesen Wegen gibt es wiederum einen günstigsten. Hierzu betrachten wir zuerst einen Spezialfall. Seien  $a \notin L$  und  $z \in L$  zwei Punkte. Wir suchen den schnellsten Weg von  $a$  nach  $z$ . Der entsprechende Polygonzug zu Lemma 3.5 ist  $\gamma = \overline{ap} + \overline{pz}$  mit  $\overline{ap} \cap L = \{p\}$  und  $\overline{pz} \subset L$ . Sei  $s$  das Lot von  $a$  auf  $L$  und  $\alpha$  der Winkel zwischen  $s$  und  $\overline{ap}$ . Mit  $\alpha_z$  bezeichnen wir den Winkel zwischen  $s$  und  $\overline{az}$ ; siehe hierzu die Abbildung 3.3.

Der Punkt  $p$  kann in Abhängigkeit des Winkels  $\alpha$  gesetzt werden, wobei  $\alpha$  im Intervall  $A := [0, \alpha_z]$  liegt. Entsprechend ergibt sich der Weg  $\gamma(\alpha) = \overline{ap} + \overline{pz}$ , dessen Zeitbedarf bestimmt ist durch

$$T(\alpha) := t(\gamma(\alpha)) = d_e(a, p) + \frac{1}{v} d_e(p, z) = \frac{\|s\|}{\cos \alpha} + \frac{1}{v} (\|\overline{az}\| \sin \alpha_z - \|s\| \tan \alpha) .^1$$

Wir suchen nun den Weg zwischen  $a$  und  $z$  mit dem geringsten Zeitbedarf. Der Winkel  $\alpha$  liegt zwischen 0 und  $\alpha_z$ . Die Funktion  $T$  ist auf diesem kompakten Intervall stetig. Sie hat also ein Minimum. Für die Ableitung von  $T$  ergibt sich:

$$T'(\alpha) = \frac{\|s\|}{\cos^2 \alpha} \cdot \left( \sin \alpha - \frac{1}{v} \right)$$

Liegt der Winkel  $\alpha_L := \arcsin \frac{1}{v}$  im Intervall  $A$ , so hat  $T$  dort ihr Minimum. Ansonsten liegt das Minimum am Rand des Intervalls  $A$ , also in  $\alpha_z$ . Der schnellste Weg von  $a$  nach  $z$  ist somit der direkte Fußweg  $\overline{az}$ , wenn  $\alpha_z \leq \alpha_L$  ist. Ansonsten ist er ein Polygonzug über das Laufband, der in  $a$  mit dem Lot  $s$  den Winkel  $\alpha_L$  einschließt. Wir fassen das Ergebnis in ein Lemma.

<sup>1</sup> $\|\overline{az}\| = d_e(a, z)$  als Länge des Liniensegments.



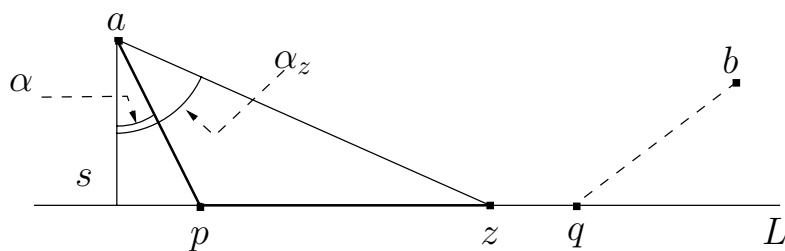


Abbildung 3.3: Der Zeitbedarf eines Weges in Abhängigkeit des Winkels  $\alpha$ .

**Lemma 3.6.** Seien  $a \notin L$  und  $z \in L$  zwei Punkte,  $s$  das Lot von  $a$  auf  $L$  und  $\alpha_z$  der Winkel zwischen  $s$  und  $\overline{az}$  in  $a$ . Weiter sei  $\alpha_L := \arcsin \frac{1}{v}$ . Dann gelten für den Weg  $\gamma$  zwischen  $a$  und  $z$  mit dem geringsten Zeitbedarf die folgenden Bedingungen:

- 1) Ist  $\alpha_z \leq \alpha_L$ , so ist  $\gamma$  der direkte Fußweg  $\overline{az}$ ,
- 2) Ist  $\alpha_z > \alpha_L$ , so ist  $\gamma = \overline{ap} + \overline{pz}$  ein Polygonzug mit  $p \in L$ , wobei  $s$  mit  $\overline{ap}$  den Winkel  $\alpha_L$  einschließt.

Mit diesem Lemma lassen sich die Wege mit dem geringsten Zeitbedarf genau spezifizieren.

**Definition 3.7.** Sei  $\mathcal{L} := (\mathbb{R}^2, L, v)$  ein Laufbandmodell, so nennen wir  $\alpha_L := \arcsin \frac{1}{v}$  den Laufbandwinkel (zum Modell  $\mathcal{L}$ ). Seien  $a \in \mathbb{R}^2 \setminus L$  ein Punkt und  $z$  der Lotpunkt von  $a$  auf  $L$ . Dann gibt es zwei Punkte  $\xi_l(a)$  und  $\xi_r(a)$  auf  $L$ , so dass  $\alpha_L = \sphericalangle(z, a, \xi_l(a)) = \sphericalangle(z, a, \xi_r(a))$ . Wir nennen  $\xi_l(a)$  und  $\xi_r(a)$  die Eintrittspunkte (von  $a$  auf  $L$ ).

Sei  $b \in \mathbb{R}^2$  ein weiterer Punkt. Entsprechend zu Lemma 3.5 lassen sich  $a$  und  $b$  über ihre Eintrittspunkte mit einem Polygonzug aus drei Teilstücken verbinden. Sei  $\gamma$  der Polygonzug mit dem geringsten Zeitbedarf und gelte für  $\gamma$  zusätzlich noch  $t(\gamma) \leq t(\overline{ab})$ , so nennen wir  $\gamma$  den Laufbandweg von  $a$  nach  $b$ .

Der Punkt  $p$  aus Lemma 3.6 ist ein Eintrittspunkt von  $a$ .

Mit dieser Definition haben wir vor allem einen speziellen Weg zwischen zwei Punkten über das Laufband definiert. Wichtig an unserer Definition ist, dass der Laufbandweg nur existiert, wenn dieser höchstens den gleichen Zeitbedarf

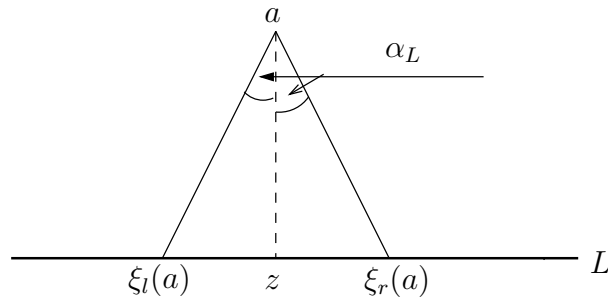


Abbildung 3.4: Laufbandwinkel und Eintrittspunkte

hat wie der direkte Fußweg zwischen den Punkten. Den Sinn der Definition zeigt der folgende Satz.

**Satz 3.8.** Sei  $\mathcal{L} := (\mathbb{R}^2, L, v)$  ein Laufbandmodell und  $a, b \in \mathbb{R}^2$  zwei Punkte. Dann existiert ein Weg  $\gamma \in \Gamma_{ab}$  mit folgenden Eigenschaften:

- (a)  $\forall \gamma' \in \Gamma_{ab} : t(\gamma) \leq t(\gamma')$ ,
- (b)  $\gamma = \overline{ab}$  oder  $\gamma$  ist Laufbandweg.

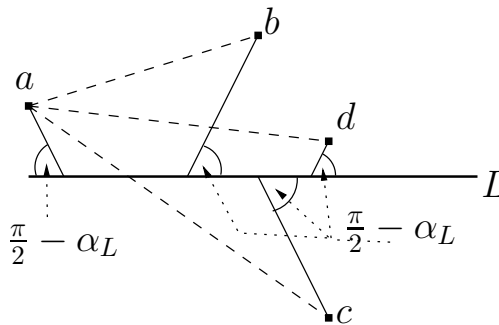


Abbildung 3.5: Fuß- und Laufbandwege

In einem Laufbandmodell existiert also zwischen zwei Punkten ein Weg mit geringstem Zeitbedarf. Dieser Weg ist der direkte Fußweg oder der Laufbandweg. Die Abbildung 3.5 zeigt die möglichen Wege von  $a$  nach  $b$ ,  $c$  oder  $d$ . Der Beweis ergibt sich direkt aus den vorangegangenen Aussagen.

*Beweis.*

Seien  $a, b \in \mathbb{R}^2$  beliebig gewählt. Gilt bereits für alle Wege  $\gamma \in \Gamma_{ab}$  die Ungleichung  $t(\overline{ab}) \leq t(\gamma)$ , so sind wir fertig. Es existiere also ein  $\gamma \in \Gamma_{ab}$  mit  $t(\gamma) < t(\overline{ab})$ . Nach Lemma 3.5 ist o.E.  $\gamma$  ein Polygonzug aus entsprechenden drei Teilstücken. Sei nun  $z \in \gamma \cap L$ , so ist  $t(\gamma) < t(\overline{az} + \overline{zb}) = t(\overline{ab})$ . O.E. habe das Teilstück von  $\gamma$  zwischen  $a$  und  $z$  einen geringen Zeitbedarf als  $\overline{az}$ . Nach Lemma 3.6 ist der Zeitbedarf von  $\overline{ap} + \overline{pz}$  minimal für ein geeigneten Eintrittspunkt  $p$  von  $a$ . Damit ist  $\overline{ap}$  Teil des Weges zwischen  $a$  und  $b$  mit dem geringsten Zeitbedarf. Analog kann man von  $p$  aus den günstigsten Weg nach  $b$  suchen. Man erhält einen geeigneten Eintrittspunkt  $q$  von  $b$ , so dass  $\overline{qb}$  Teil des gesuchten Weges ist. Da nun  $p$  und  $q$  auf  $L$  liegen, erhält man den Polygonzug  $\overline{ap} + \overline{pq} + \overline{qb}$  als Weg mit dem geringsten Zeitbedarf, wobei (nach Definition) der Polygonzug ein Laufbandweg ist.  $\square$

**Bemerkung.** Der schnellste Weg ist nicht immer eindeutig. Es gibt Punktepaare, deren Fußweg und Laufbandweg unterschiedlich verlaufen, aber dennoch den gleichen Zeitbedarf haben. Diese Punkte werden wir in einem späteren Abschnitt genauer untersuchen.

Da wir den schnellsten Weg genau spezifiziert haben, können wir mit dem Zeitbedarf  $t$  eine Metrik definieren.

**Definition 3.9.** Sei  $\mathcal{L} := (\mathbb{R}^2, L, v)$  ein Laufbandmodell und der Zeitbedarf eines Weges definiert durch  $t(\gamma) := \ell(\gamma \setminus L) + \frac{1}{v} \cdot \ell(\gamma \cap L)$ . Wir definieren die Abbildung  $d_v : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $d_v(a, b) := \min\{t(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma_{ab}\}$  und nennen den Funktionswert den Bandabstand zwischen  $a$  und  $b$ .

**Satz 3.10.**  $d_v$  ist eine Metrik auf  $\mathbb{R}^2$ .

*Beweis.*

$d_v$  ist positiv definit, da der Zeitbedarf nicht negativ ist und natürlich  $t(\overline{aa}) = 0$  gilt. Die Symmetrie von  $d_v$  ergibt sich daraus, dass die untersuchten Wege ungerichtet sind.

Die Dreiecksungleichung ergibt sich aus der Definition durch die Wahl des minimalen Zeitbedarfs. Sind  $a, b$  und  $c$  drei Punkte. Es gelte  $t(\gamma_{ab}) = d_v(a, b)$  und  $t(\gamma_{bc}) = d_v(b, c)$ . Dann ist  $\gamma_{ab} + \gamma_{bc}$  ein Weg von  $a$  nach  $c$ , wodurch gilt:  $d_v(a, c) \leq \gamma_{ab} + \gamma_{bc} = d_v(a, b) + d_v(b, c)$ .  $\square$

**Bemerkung.**  $d_v$  ist eine zusammengesetzte Metrik. Hierbei gilt in  $\mathbb{R}^2 \setminus L$  die euklidische Metrik. Auf  $L$  gilt lokal die Faktorisierung der euklidischen Metrik mit dem Wert  $\frac{1}{v}$ . Informationen über zusammengesetzte Metriken findet man in [9] und [10]. Grundgedanke ist eine Ebene, in der es Gebiete mit unterschiedlichen Geländetypen gibt. Das Durchqueren dieser Gebiete benötigt unterschiedlich viel Zeit. Über den Zeitbedarf von Wegen in der Ebene wird dann eine Metrik definiert.

### 3.1.3 Alternative Betrachtung des Laufbandmodells

Das Laufbandmodell  $\mathcal{L}$  beinhaltet eine Gerade  $L$ . Man kann (auf Grund von Koordinatentransformation) diese Gerade als  $X$ -Achse wählen.  $\mathcal{L}$  hängt also nur noch vom Parameter  $v$  ab. Im weiteren Verlauf des Kapitels beschränken wir uns auf die  $X$ -Achse als Laufband und betrachten den metrischen Raum  $(\mathbb{R}^2, d_v)$ , dessen Voronoi-Regionen den Regionen des Laufbandmodells entsprechen.

## 3.2 Geh- und Bandbereiche eines Punktes

In diesem Abschnitt betrachten wir die verschiedenen Bereiche des  $\mathbb{R}^2$ , die von einem gegebenen Punkte  $a$  aus besser zu Fuß oder mit dem Laufband zu erreichen sind. Die Grenze der Bereiche bilden Punkte, deren direkter Fußweg und deren Laufbandweg nach  $a$  den gleichen Zeitbedarf haben.

Wir werden eine (von  $a$  abhängige) Zerlegung des  $\mathbb{R}^2$  erhalten, mit der man später den Verlauf des Bisektors zweier Punkte im Laufbandmodell konstruieren kann. Die Zerlegung beinhaltet bereits die grundlegende Idee, mit der das Voronoi-Diagramm des Laufbandmodells auf ein Voronoi-Diagramm von Liniensegmenten zurückgeführt werden kann.

Wie im vorherigen Abschnitt sei  $v \geq 1$  der Geschwindigkeitsparameter mit entsprechenden Laufbandwinkel  $\alpha_L = \arcsin \frac{1}{v}$ ; das Laufband  $L$  ist die  $X$ -Achse. Zur Vereinfachung benutzen wir den Namen eines Punktes auf  $L$  auch als Bezeichnung für seine  $X$ -Koordinate.

Wir bezeichnen mit  $L^+ := \{p = (p_x, p_y) \mid p_y \geq 0\}$  ( $L^-$  entsprechend) die obere bzw. untere Halbebene. Ein Punkt  $a = (a_x, a_y) \in L^+$  sei gegeben.

Wir benennen weiter die entsprechenden Eintrittspunkte von  $a$  auf  $L$  mit  $\xi_l(a)$  und  $\xi_r(a)$ , wobei  $\xi_l(a) \leq \xi_r(a)$  gelte. Elementare Dreiecksberechnung ergibt  $\xi_r(a) = a_x + a_y \tan \alpha_L$  und  $\xi_l(a) = a_x - a_y \tan \alpha_L$ .

Wir beginnen mit der Bezeichnung einiger Mengen.

**Definition 3.11.**

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(a) &:= \{p \in \mathbb{R}^2 \mid d_v(a, p) = d_e(a, p)\}, \\ \mathcal{F}(a) &:= \{p \in \mathbb{R}^2 \mid \text{Es existiert ein Laufbandweg } a \text{ und } p\}, \\ \mathcal{F}_l(a) &:= \{p \in \mathcal{F}(a) \mid p_x \leq a_x\}, \\ \mathcal{F}_r(a) &:= \{p \in \mathcal{F}(a) \mid a_x \leq p_x\}. \end{aligned}$$

Die Menge  $\mathcal{G}(a)$  nennen wir Gehbereich von  $a$ , die Menge  $\mathcal{F}(a)$  den Bandbereich von  $a$ .

Uns interessiert die Aufteilung von  $\mathbb{R}^2$  in  $\mathcal{G}(a)$  und  $\mathcal{F}(a)$ . Dazu betrachten wir nun die beiden Halbebenen  $L^+$  und  $L^-$  getrennt voneinander.

### 3.2.1 $L^+$

Um die Mengen  $\mathcal{G}(a)$  und  $\mathcal{F}(a)$  auf  $L^+$  zu spezifizieren, benötigen wir die Konstruktion einiger geometrischer Elemente. Das Ergebnis der Konstruktion gibt dann bereits einen Hinweis auf den Bezug zum Voronoi-Diagramm von Liniensegmenten.

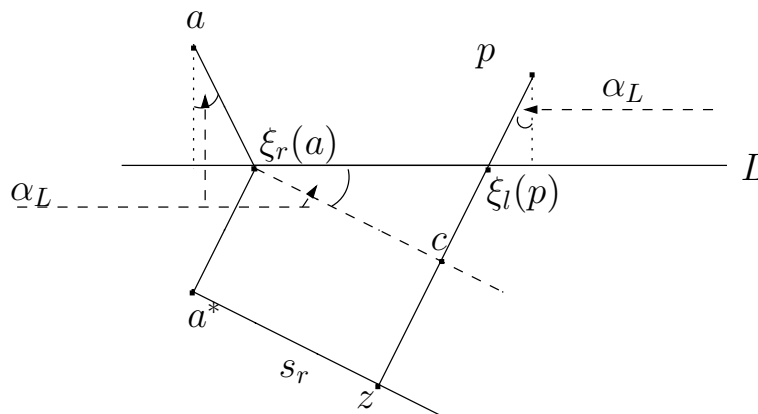


Abbildung 3.6: Konstruktion der Stützlinien

**Konstruktion 3.12.** Sei  $a$  ein Punkt mit  $a_y > 0$ .

$\xi_l(a), \xi_r(a)$  : Eintrittspunkte von  $a$  mit  $\xi_l(a) \leq \xi_r(a)$ ,

$a^*$  :  $a^* := (a_x, -a_y)$ , gespiegelter Punkt von  $a$  an  $L$ ,

$s_r^-$  :  $s_r^-$  ist die Halbgerade, die in  $a^*$  beginnt, senkrecht zu  $\overline{a^*\xi_r(a)}$  liegt und deren Punkte alle rechts von  $a^*$  liegen, d.h.

$$s_r^- := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq a_x \wedge y = -|a_y| - |x - a_x| \tan \alpha_L\},$$

$p$  :  $p$  sei ein Punkt in  $L^+$  mit  $a_x < p_x$

$\xi_l(p)$  :  $\xi_l(p)$  sei der linke Eintrittspunkt von  $p$ ,

$c$  :  $c$  ist der Lotpunkt von  $\xi_r(a)$  auf die Gerade durch die Punkte  $p$  und  $\xi_l(p)$ .

$z$  :  $z$  sei der Lotpunkt von  $p$  auf die Gerade  $\tilde{s}_r \supset s_r$ .

$$\gamma_p : \gamma_p := \overline{a\xi_r(a)} + \overline{\xi_r(a)\xi_l(p)} + \overline{\xi_l(p)p}$$

**Bemerkung.** Die Konstruktion ab dem Punkt  $p$  hat nur Sinn, wenn  $\xi_r(a) \leq \xi_l(p)$  gilt. Da ein Laufbandweg von  $a$  nach  $p$  (mit  $a_x \leq p_x$ ) über die Eintrittspunkte  $\xi_r(a)$  und  $\xi_l(p)$  laufen muss, ist  $\xi_r(a) \leq \xi_l(p)$  eine notwendige Bedingung für die Existenz eines Laufbandweges zwischen  $a$  und  $p$ .

Nach Lemma 3.6 ist der schnellste Weg über das Laufband von  $a$  nach  $p$  der Polygonzug  $\gamma_p$ . Dieser Weg hat den Zeitbedarf  $t(\gamma_p) = d_e(a, \xi_r(a)) + \frac{1}{v}d_e(\xi_r(a), \xi_l(p)) + d_e(\xi_l(p), p)$ .

Das Ziel der Konstruktion ist folgende Aussage.

**Lemma 3.13.** Seien die Bezeichnungen aus obiger Konstruktion gegeben und es gelte  $\xi_r(a) \leq \xi_l(p)$ , dann gilt  $z \in s_r^-$  und

$$t(\gamma_p) = d_e(s_r, p). \tag{3.1}$$

*Beweis.*

Es gilt nach der Konstruktion  $d_e(p, z) = d_e(s_r^-, p)$  und weiter:

$$\begin{aligned}\gamma_p &= \overline{p \xi_l(p)} + \overline{\xi_l(p) \xi_r(a)} + \overline{\xi_r(a) a} \\ \overline{p z} &= \overline{p \xi_l(p)} + \overline{\xi_l(p) c} + \overline{c z}\end{aligned}$$

$\overline{\xi_r(a) a^*}$  liegt parallel zu  $\overline{p \xi_l(p)}$  also auch zu  $\overline{p z}$ .

Damit gilt  $d_e(z, c) = d_e(a^*, \xi_r(a)) = d_e(a, \xi_r(a))$ .

Die Punkte  $c$ ,  $\xi_r(a)$  und  $\xi_l(p)$  bilden ein Dreieck mit einem rechten Winkel in  $c$ . Nach Konstruktion ergibt sich für den Winkel in  $\xi_r(a)$ :  $\sphericalangle(c, \xi_r(a), \xi_l(p)) = \alpha_L$ . Daraus folgt das Seitenverhältnis  $\sin \alpha_L = \frac{d_e(\xi_r(a)c)}{d_e(\xi_r(a)\xi_l(p))}$ . Da für den Laufbandwinkel  $\sin \alpha_L = \frac{1}{v}$  gilt, ergibt sich die Gleichung  $d_e(\xi_r(a), c) = \frac{1}{v} d_e(\xi_r(a)\xi_l(p))$ . Insgesamt gilt somit:

$$\begin{aligned}t(\overline{p z}) &= d_e(p, z) \\ &= d_e(p, \xi_l(p)) + d_e(\xi_l(p), c) + d_e(c, z) \\ &= d_e(p, \xi_l(p)) + \frac{1}{v} d_e(\xi_l(p), \xi_r(a)) + d_e(\xi_r(a), a) \\ &= t(\overline{p \xi_l(p)}) + t(\overline{\xi_l(p) \xi_r(a)}) + t(\overline{\xi_r(a) a}) \\ &= t(\gamma_p).\end{aligned}$$

□

Auf Grund der wichtigen Eigenschaft 3.1 aus Lemma 3.13 von  $s_r^-$  ist eine eigene Definition berechtigt.

**Definition 3.14.** Sei  $a \in \mathbb{R}^2$  ein Punkt. Wir definieren die Stützlinien  $s_l^+$ ,  $s_l^-$ ,  $s_r^+$  und  $s_r^-$  von  $a$  wie folgt:

$$\begin{aligned}s_l^+(a) &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq a_x \wedge y = |a_y| + |x - a_x| \tan \alpha_L\}, \\ s_r^+(a) &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq a_x \wedge y = |a_y| + |x - a_x| \tan \alpha_L\}, \\ s_l^-(a) &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq a_x \wedge y = -|a_y| - |x - a_x| \tan \alpha_L\}, \\ s_r^-(a) &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq a_x \wedge y = -|a_y| - |x - a_x| \tan \alpha_L\}, \\ s^+(a) &:= s_l^+(a) \cup s_r^+(a), \\ s^-(a) &:= s_l^-(a) \cup s_r^-(a).\end{aligned}$$

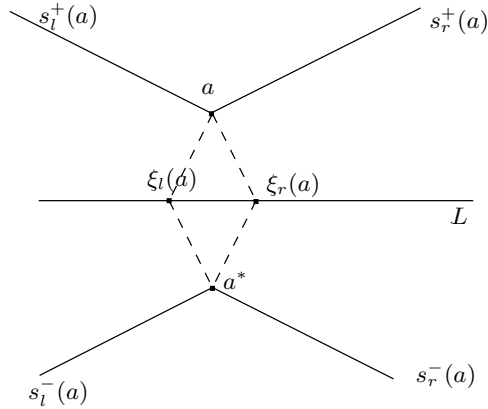


Abbildung 3.7: Stützlinien eines Punktes

**Bemerkung.** Aus der Definition folgt sofort, dass  $s^+(a)$  in  $L^+$  und  $s^-(a)$  in  $L^-$  verläuft, wobei die Stützlinien mit  $L$  nur dann einen gemeinsamen Punkt haben, wenn  $a$  selbst auf  $L$  liegt.

Liegt  $a$  in  $L^+$ , so ist  $a = s_l^+(a) \cap s_r^+(a)$ . Ist  $a$  Element von  $L^-$ , so ist  $a = s_l^-(a) \cap s_r^-(a)$ .

Aus Lemma 3.13 lässt sich nun ein weiteres Lemma ableiten, das wir benutzen, um die Geh- und Bandbereiche eines Punktes sowie die Bisektoren von verschiedenen Punkten zu spezifizieren.

**Lemma 3.15.** Sei  $a, p \in L^+$  gegeben mit  $s_l = s_l^-(a)$  und  $s_r = s_r^-(a)$  als Stützlinien von  $a$ . Dann gilt:

$$d_v(a, p) = \min\{d_e(a, p), d_e(s_l^-, p), d_e(s_r^-, p)\}. \quad (3.2)$$

*Beweis.*

Seien o.E.  $a_x \leq p_x$ . (Daraus folgt bereits  $d_e(s_l^-, p) \geq d_e(s_r^-, p)$ .) Nach Lemma 3.13 ist  $d_e(s_r, p) = t(\gamma_p)$  mit  $\gamma_p$  aus Konstruktion 3.12. Sei nun  $\gamma$  ein Weg zwischen  $a$  und  $p$  mit  $d_v(a, p) = t(\gamma)$ . Ist  $\gamma$  ein Laufbandweg, so gilt nach den Lemmas 3.6 und 3.13  $t(\gamma) = t(\gamma_p) = d_e(s_r, p) \leq d_e(a, p)$ ; ist  $\gamma$  der direkte Fußweg, so gilt  $d_e(a, p) = t(\gamma) \leq t(\gamma_p)$ .  $\square$



Wir können nun die Bereiche  $\mathcal{G}(a)$  und  $\mathcal{F}(a)$  auf  $L^+$  genau bezeichnen:

**Lemma 3.16.** *Sei  $a \in L^+$ ,  $a_y > 0$  mit Stützlinien  $s_l$  und  $s_r$ . Weiter sei  $\mathcal{S} := \{a, s_l, s_r\}$ . Dann gilt auf  $L^+$ :*

$$\mathcal{G}(a) = cl(VR(a, \mathcal{S})) \quad (3.3)$$

$$\mathcal{F}(a) = cl(VR(s_l, \mathcal{S})) \cup cl(VR(s_r, \mathcal{S})) \quad (3.4)$$

Für die Schnittmenge von  $\mathcal{G}(a)$  und  $\mathcal{F}(a)$  auf  $L^+$  ergibt sich:

$$\mathcal{G}(a) \cap \mathcal{F}(a) = (B(a, s_r) \cap S(s_r)) \cup (B(a, s_l) \cap S(s_l)).^2 \quad (3.5)$$

**Bemerkung.** Der euklidischen Bisektor  $B(a, s_r)$  ist (als Bisektor eines Punktes mit einer Halbgeraden) ein Parabelstück. Da wir dieses Parabelstück später noch benötigen, bezeichnen wir es explizit mit

$$\Gamma_r(a) := \mathcal{G}(a) \cap \mathcal{F}_r(a) \cap L^+. \quad (3.6)$$

Analog wird  $\Gamma_l(a)$  definiert.

Die Abbildung 3.8 zeigt  $\Gamma_r(a)$ . Der direkte Fußweg von  $q$  nach  $a$  hat den geringsten Zeitbedarf, während für  $p$  der Laufbandweg der schnellste Weg nach  $a$  ist.

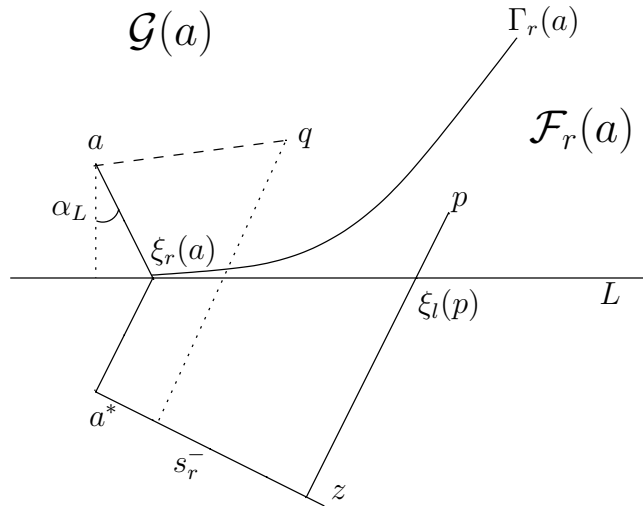


Abbildung 3.8: direkter Fußweg und Laufbandweg

<sup>2</sup> $B$  bezeichnet den Bisektor,  $S$  bezeichnet den Streifen einer Linie aus Definition 1.7.



**Lemma 3.17.** *Sei  $a$  ein Punkt mit  $a_y > 0$ . Dann gilt:*

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(a) \cap L^- &= \left\{ p \in L^- \mid \frac{|p_x - a_x|}{d_e(a, p)} \leq \frac{1}{v} \right\} \\ \mathcal{F}(a) \cap L^- &= \left\{ p \in L^- \mid \frac{|p_x - a_x|}{d_e(a, p)} \geq \frac{1}{v} \right\}\end{aligned}$$

Seien  $\xi_l(a)$  und  $\xi_r(a)$  die Eintrittspunkte von  $a$ . Mit  $g_r$  bezeichnen wir die Halbgerade, die von  $\xi_r(a)$  aus ganz in  $L^-$  verläuft und Teil der Geraden durch  $a$  und  $\xi_r(a)$  ist. Analog wird  $g_l$  definiert. Dann gilt auf  $L^-$  :

$$\mathcal{G}(a) \cap \mathcal{F}(a) = g_r \cup g_l. \quad (3.7)$$

Für einen Punkt  $z \in g_r \cup g_l$  gilt gerade, dass der Winkel von  $\overline{az}$  mit dem Lot von  $a$  auf  $L$  gleich dem Laufbandwinkel ist. Der Weg  $\overline{az}$  ist ein spezieller Laufbandweg mit nur einem Punkt auf  $L$ .

Die Abbildung 3.10 zeigt die Bereiche  $\mathcal{G}(a)$  und  $\mathcal{F}(a)$ . Der Eintrittspunkt

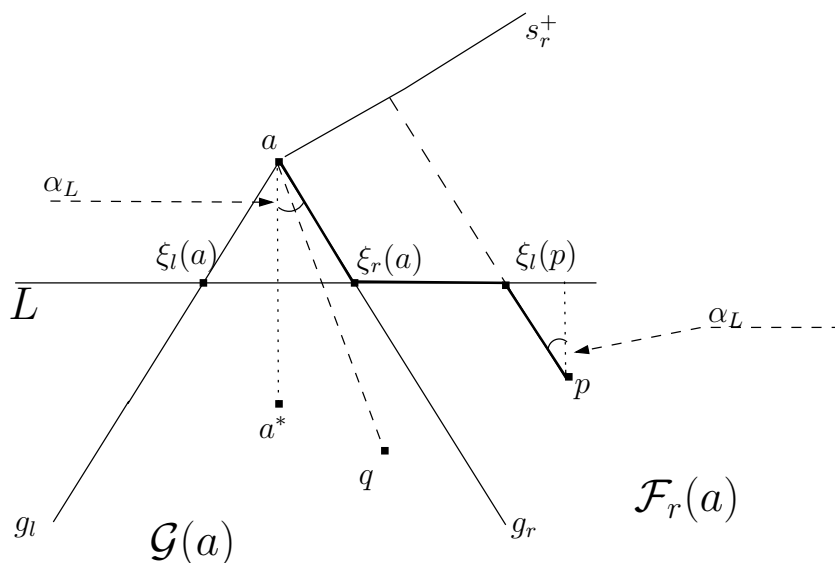


Abbildung 3.10:  $\mathcal{G}(a)$  und  $\mathcal{F}(a)$  auf  $L^-$

$\xi_r(a)$  ist zu  $a$  und  $a^*$  gleich weit entfernt. Für die Länge eines Laufbandweges über  $\xi_r(a)$  ist es somit gleich, ob er in  $a$  oder  $a^*$  endet. Analog zu

der Betrachtung der Halbebene  $L^+$  kann man zeigen, dass für einen Punkt  $p \in L^- \cap \mathcal{F}_r(a)$  die folgende Gleichung gilt:

$$d_v(a, p) = d_e(p, s_r^+(a)). \quad (3.8)$$

Insgesamt ergibt sich das folgende Lemma.

**Lemma 3.18.** *Ist  $a \in L^+$  mit den Stützlinien  $s_r^+(a)$  und  $s_l^+(a)$  gegeben. Sei weiter  $p \in L^-$  beliebig gewählt, so gilt:*

$$d_v(p, a) = \min\{d_e(p, s_l^+(a)), d_e(p, s_r^+(a))\} \quad (3.9)$$

### 3.2.3 Zusammenfassung

Sei  $a \in \mathbb{R}^2$  mit  $a_y > 0$ . Nach Lemma 3.16 besteht die Grenze zwischen  $\mathcal{G}(a)$  und  $\mathcal{F}(a)$  in  $L^+$  aus dem Bisektor von  $a$  mit seinen Stützlinien, also aus zwei Parabelstücken, die in den jeweiligen Eintrittspunkten beginnen und in  $L^+$  verlaufen. Sie sind zu einander spiegelsymmetrisch bezüglich der Senkrechten von  $a$  auf  $L$ . Die Abbildung 3.11 zeigt die Geh- und Bandbereiche von  $a$ .

Auf  $L^-$  besteht die Grenze zwischen  $\mathcal{G}(a)$  und  $\mathcal{F}(a)$  aus zwei Halbgera-

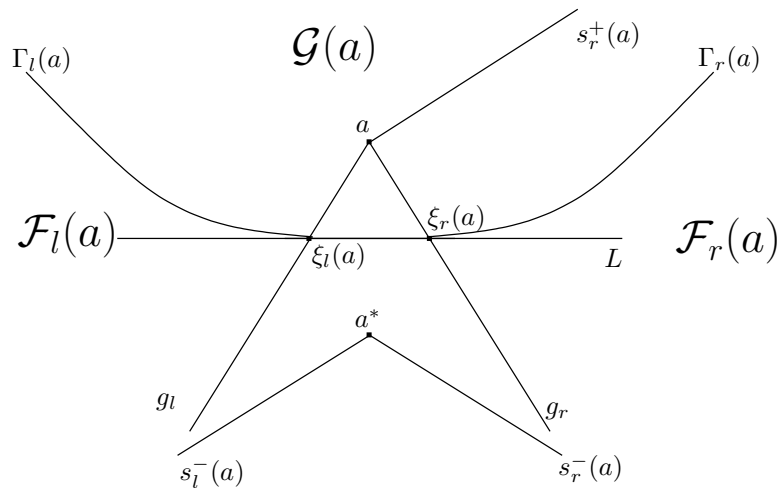


Abbildung 3.11: Geh- und Bandbereiche von  $a$

den, die in den Eintrittspunkten beginnen und jeweils eine Verlängerung eines Segments des Punktes  $a$  mit einem entsprechenden Eintrittspunkt sind. Betrachten wir nun ganz  $\mathcal{G}(a)$  und  $\mathcal{F}(a)$  näher.

**Lemma 3.19.**  $\mathcal{G}(a)$  ist sternförmig, also insbesondere zusammenhängend. Die Senkrechte durch  $a$  auf  $L$  liegt ganz in  $\mathcal{G}(a)$ .

*Beweis.*

Ist  $p$  in  $\mathcal{G}(a)$ , so hat  $\overline{pa}$  den geringsten Zeitbedarf, also auch jeder Teilweg von  $\overline{pa}$ , wodurch  $\overline{pa} \subset \mathcal{G}(a)$  gilt. Nach den vorherigen beiden Abschnitten ergibt sich, dass die Senkrechte durch  $a$  ganz in  $\mathcal{G}(a)$  verläuft.  $\square$

**Lemma 3.20.**  $\mathcal{F}(a)$  ist nicht zusammenhängend.

*Beweis.*

Die Senkrechte durch  $a$  auf  $L$  gehört nicht zu  $\mathcal{F}(a)$ , die beiden Eintrittspunkte von  $a$  schon. Die Eintrittspunkte werden aber durch die Senkrechte getrennt.  $\square$

**Lemma 3.21.**  $\mathcal{F}_l(a)$  und  $\mathcal{F}_r(a)$  sind zusammenhängend.

*Beweis.*

Ist  $p \in \mathcal{F}_r(a)$  so ist der günstigste Weg von  $p$  nach  $a$  ein Laufbandweg, der über den Eintrittspunkt  $\xi_r(a)$  von  $a$  führt. Der entsprechende Teilweg zwischen  $p$  und  $\xi_r(a)$  liegt ganz in  $\mathcal{F}_r(a)$ . Damit kann man zwei beliebige Punkte aus  $\mathcal{F}_r(a)$  über  $\xi_r(a)$  verbinden.

Entsprechendes gilt auch für  $\mathcal{F}_l(a)$ .  $\square$

**Bemerkung.** Die beiden Mengen  $\mathcal{F}_l(a)$  und  $\mathcal{F}_r(a)$  sind zueinander symmetrisch bezüglich der Senkrechten durch  $a$  auf  $L$ .

Die Betrachtung der Geh- und Bandbereiche hat noch eine wesentliche Erkenntnis geliefert. Der Bandabstand kann durch den euklidischen Abstand von Punkten und Linien berechnet werden. Hierzu formulieren wir das folgende Lemma.

**Lemma 3.22.** Sei  $\mathcal{L} = (\mathbb{R}^2, L, v)$  ein Laufbandmodell. Weiter seien  $L^+$  und  $L^-$  die durch  $L$  bestimmten Halbebenen. Ein Punkt  $a \in L^+$  sei mit seinen entsprechenden Stützlinien aus Definition 3.14 fest. Ein weiterer Punkt  $p$  sei beliebig gewählt. Es gilt:

$$d_v(p, a) = \begin{cases} \min\{d_e(p, a), d_e(p, s^-(a))\} & | p \in L^+ \\ d_e(p, s^+(a)) & | p \in \overline{L^-} \end{cases} \quad (3.10)$$

Der Beweis ergibt sich direkt aus der Zusammenfassung der vorangegangenen Lemmata 3.15 und 3.18.

Wir haben den Geh- und Fahrbereich eines Punktes in  $L^+$  untersucht. Diese Untersuchung kann auf Punkte in  $L^-$  mit entsprechenden Aussagen übertragen werden. Es bleibt noch der Spezialfall, dass  $a \in L$  ist. In diesem Fall

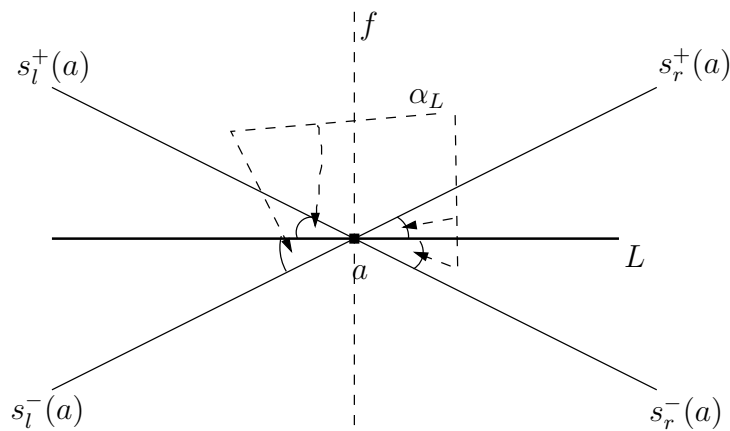


Abbildung 3.12: Geh- und Bandbereiche von  $a \in L$

stimmt  $a$  mit seinen beiden Eintrittspunkten überein. Sei  $f$  die Senkrechte zu  $L$  durch  $a$ . Von  $a$  gehen vier Halbgeraden aus, die mit  $f$  den Winkel  $\alpha_L$  einschließen und vier Bereiche abtrennen. Die beiden Bereiche, die  $f$  beinhalten bilden  $\mathcal{G}(a)$ . Die anderen beiden, die die Gerade  $L$  beinhalten, bilden  $\mathcal{F}(a)$ . Dies ist der einzige Fall, wo  $\mathcal{F}(a)$  zusammenhängend ist, da  $\mathcal{F}_l(a)$  und  $\mathcal{F}_r(a)$  den Punkt  $a$  gemeinsam haben. Ist  $b \in f$  ein weiter Punkt, der nicht auf  $L$  liegt, so gilt  $\mathcal{F}(b) \subset \mathcal{F}(a)$ . Betrachtet man die Grenzwege  $\mathcal{F}(b) \cap \mathcal{G}(b)$ , und lässt man dann  $b$  gegen  $a$  laufen, so konvergieren die Grenzwege gegen die oben genannten Halbgeraden.

Zusammenfassend kann man daher den folgenden Satz formulieren:

**Satz 3.23.** Sei  $\mathcal{L} = (\mathbb{R}^2, L, v)$  ein Laufbandmodell. Weiter seien  $L^+$  und  $L^-$  die durch  $L$  bestimmten Halbebenen. Ein Punkt  $a \in \mathbb{R}^2$  sei mit seinen entsprechenden Stützlinien aus Definition 3.14 fest. Ein weiterer Punkt  $p$  sei beliebig gewählt. Es gilt:

$$d_v(p, a) = \begin{cases} \min\{d_e(p, a), d_e(p, s^-(a))\} & | p \in L^+ \\ \min\{d_e(p, a), d_e(p, s^+(a))\} & | p \in L^- \end{cases} \quad (3.11)$$

*Beweis.*

Aus der Definition 3.14 der Stützlinien ergibt sich direkt  $a \in s^+(a)$ , wenn  $a \in L^+$ . Damit entspricht für  $a \in L^+$  die Aussage des Satzes dem Lemma 3.22. Für  $a \in L^-$  gilt  $a \in s^-(a)$  und es können die Aussagen der Lemmata des Abschnittes für  $a^-$  entsprechend formuliert werden. Für  $a \in L$  gilt  $a = s^+(a) \cap s^-(a)$ .  $\square$

### 3.3 Der Bisektor

Durch ein Laufbandmodell  $\mathcal{L}$  wird ein Metrik  $d_v$  definiert. Diese Metrik impliziert für je zwei Punkte einen Bisektor. In diesem Abschnitt untersuchen wir den Verlauf des Bisektors. Er ist abhängig von der Lage der Punkte zu einander bezogen auf das Laufband und seine Geschwindigkeit. Wie zu Beginn des Kapitels erwähnt, genügt es, den metrischen Raum  $(\mathbb{R}^2, d_v)$  mit  $v > 1$  zu betrachten, wo die  $X$ -Achse das Laufband darstellt.

Im vorangegangenen Abschnitt haben wir einem festen Punkt  $a$  verschiedene Punkte, Halbgeraden und Parabelstücke zugeordnet, sowie eine Zerlegung der Ebene  $\mathbb{R}^2$  ermittelt. Eine entsprechende Zerlegung und Elemente gibt auch für andere Punkte. Die Untersuchung des Bisektors erfolgt mittels dieser Elemente und Zerlegungen. Wir kommen nun zur Definition des Bisektors.

**Definition 3.24.** Seien  $a, b \in \mathbb{R}^2$  zwei Punkte, so bezeichnen wir die folgende Menge

$$B_L(a, b) := \{p \in \mathbb{R}^2 \mid d_v(a, p) = d_v(b, p)\} \quad (3.12)$$

als Bisektor von  $a$  und  $b$  (bzgl. der Metrik  $d_v$ ).

Seien in diesem Abschnitt  $a$  und  $b$  zwei unterschiedliche Punkte. Zu jedem dieser Punkte können wir entsprechend dem vorherigen Abschnitt eine Zerlegung der Ebene in Lauf- und Bandbereiche der jeweiligen Punkte durchführen.

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^2 &= \mathcal{F}_l(a) \cup \mathcal{G}(a) \cup \mathcal{F}_r(a) \\ \mathbb{R}^2 &= \mathcal{F}_l(b) \cup \mathcal{G}(b) \cup \mathcal{F}_r(b)\end{aligned}\tag{3.13}$$

Wir betrachten den Verlauf des Bisektors auf den einzelnen Schnittmengen der Bereiche von  $a$  und  $b$ . Hierbei unterscheiden wir auch noch nach den Halbebenen  $L^+$  und  $L^-$ . Wir erhalten also

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup [L^* \cap A \cap B] \text{ mit } \begin{cases} L^* \in \{L^+, L^-\} \\ A \in \{\mathcal{F}_l(a), \mathcal{G}(a), \mathcal{F}_r(a)\} \\ B \in \{\mathcal{F}_l(b), \mathcal{G}(b), \mathcal{F}_r(b)\} \end{cases}\tag{3.14}$$

Ich werde nicht alle achtzehn mögliche Mengen einzeln untersuchen, da der Verlauf des Bisektors  $B_L(a, b)$  stark von der Lage der Punkte  $a$  und  $b$  abhängig ist. So sind die oben angegebenen Schnittmengen teilweise leer oder sie enthalten den Bisektor nicht. Wir können bereits aus den Erkenntnissen des vorherigen Abschnittes einen wichtigen Satz über den Bisektor formulieren.

**Satz 3.25.** *Sei  $\mathcal{L}$  ein Laufbandmodell und  $a, b \in \mathbb{R}^2$  gegeben.*

*Dann besteht der Bisektor  $B_L(a, b)$  aus Teilstücken euklidischer Bisektoren von Punkten und Liniensegmenten. Unter der obigen Zerlegung 3.14 von  $\mathbb{R}^2$ , ergeben sich folgende Übereinstimmungen:*

$$\begin{aligned}B_L(a, b) &= B(a, b) && \text{auf } \mathcal{G}(a) \cap \mathcal{G}(b) \\ B_L(a, b) &= B(a, s_\sigma^-(b)) && \text{auf } \mathcal{G}(a) \cap \mathcal{F}_\sigma(b) \cap L^+ \\ B_L(a, b) &= B(a, s_\sigma^+(b)) && \text{auf } \mathcal{G}(a) \cap \mathcal{F}_\sigma(b) \cap L^- \\ B_L(a, b) &= B(s_\mu^-(a), s_\sigma^-(b)) && \text{auf } \mathcal{F}_\mu(a) \cap \mathcal{F}_\sigma(b) \cap L^+ \\ B_L(a, b) &= B(s_\mu^+(a), s_\sigma^+(b)) && \text{auf } \mathcal{F}_\mu(a) \cap \mathcal{F}_\sigma(b) \cap L^-\end{aligned}$$

mit  $\sigma, \mu \in \{l, r\}$ .



*Beweis.*

Der Beweis ist eine direkte Folge aus Satz 3.22. Für einen Punkt  $p$  gilt beispielsweise  $d_v(a, p) = d_e(a, p)$  auf  $\mathcal{G}(a)$  und  $d_v(b, p) = d_e(s_r^+(b), p)$  auf  $\mathcal{F}_r(b) \cap L^-$ . Daraus folgt für  $p \in B_L(a, b)$  auf  $\mathcal{G}(a) \cap \mathcal{F}_r(b) \cap L^-$  die Gleichung  $d_v(a, p) = d_e(a, p) = d_e(s_r^+(b), p) = d_v(b, p)$ .  $\square$

**Bemerkung.** Der Bisektor zweier Punkte im Laufbandmodell zerfällt also in Bisektorstücke von diesen Punkten und geeigneten Halbgeraden bzgl. der euklidischen Metrik. Diese Bisektoren haben wir bereits untersucht. Sie bestehen aus Liniensegmenten und Parabelstücken, können aber auch ganze Flächen beinhalten.

Die euklidischen Bisektoren des Satzes werden von den Punkten und ihren Stützlinien bestimmt. Die Steigungen der Stützlinien hängen alleine von dem Laufbandwinkel  $\alpha_L$  ab, der nur durch die Geschwindigkeit des Laufbandes bestimmt wird, und damit nicht von den Punkten  $a$  und  $b$  abhängt. Damit sind die gleichnamigen Stützlinien von  $a$  und  $b$  parallel.

Auf Grund der Symmetrie des Laufbandmodells, gilt die einfache Aussage:

**Lemma 3.26.** *Sind  $a \neq b$  zwei Punkte mit  $a_y = b_y$ , so ist  $B_L(a, b)$  die Mittelsenkrechte der beiden Punkte.*

Der Verlauf des Bisektors hängt stark von der Lage der Punkte zu einander ab. Diese Abhängigkeit wollen wir daher zuerst näher spezifizieren.

Ist  $a \in \mathbb{R}^2$  gegeben, so verlaufen  $s^+(a)$  und  $s^-(a)$  monoton zu  $L$ . Ist  $a_y \neq 0$ , so haben  $L$ ,  $s^+(a)$  und  $s^-(a)$  keinen Punkt gemeinsam. Sie begrenzen damit vier Gebiete, die wir von oben nach unten mit  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$  und  $H_4$  bezeichnen (Abbildung 3.13). Die genaue Definition lautet:

**Definition 3.27.** Sei  $a \in L^+$ , so definieren wir folgende Gebiete:

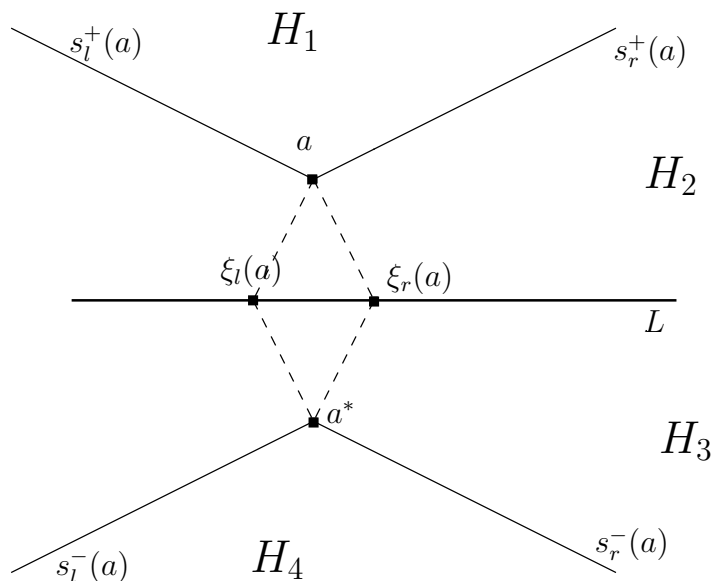
$$H_1(a) := \{(x, y) \in L^+ \mid y > a_y + |x - a_x| \tan \alpha_L\} \quad (3.15)$$

$$H_2(a) := \{(x, y) \in L^+ \mid y < a_y + |x - a_x| \tan \alpha_L\} \quad (3.16)$$

$$H_3(a) := \{(x, y) \in L^- \mid y > -a_y - |x - a_x| \tan \alpha_L\} \quad (3.17)$$

$$H_4(a) := \{(x, y) \in L^- \mid y < -a_y - |x - a_x| \tan \alpha_L\}. \quad (3.18)$$

Für einen Punkt  $b \in L^-$  sei  $b^* = (b_x, -b_y)$  der gespiegelte Punkt von  $b$  an  $L$ . Für  $b$  definieren wir dann die Gebiete mit  $H_1(b) = H_4(b^*)$ ,  $H_2(b) = H_3(b^*)$ ,  $H_3(b) = H_2(b^*)$  und  $H_4(b) = H_1(b^*)$ .

Abbildung 3.13: Gebiete  $H_1$  bis  $H_4$ 

**Bemerkung.** Für einen Punkt  $a \in L^+$  geht aus der Definition der Gebiete  $H_1$  bis  $H_4$  unmittelbar hervor, dass  $s^+(a)$  die gemeinsame Grenze von  $H_1$  und  $H_2$  ist, dass  $L$  die Grenze zwischen  $H_2$  und  $H_3$  ist und dass  $s^-(a)$  die gemeinsame Grenze von  $H_3(a)$  und  $H_4(a)$  ist.

Liegt  $a$  auf  $L$ , so berühren sich  $L$ ,  $s^+(a)$  und  $s^-(a)$  in  $a$ , wodurch  $H_2(a)$  und  $H_3(a)$  nicht mehr zusammenhängend sind.

Liegen zwei Punkte auf  $L$ , so ist nach Lemma 3.26 der Bisektor die Mittelsenkrechte. Wir können also davon ausgehen, dass bei den folgenden Untersuchungen des Bisektors ein Punkt  $a$  nicht auf  $L$  liegt. Die Symmetrie des Modells bezüglich des Laufbandes lässt die Einschränkung auf  $L^+$  zu. Der andere Punkt  $b$  wird beliebig aus  $\mathbb{R}^2$  gewählt. Hierbei können durch die Eigenschaften des Laufbandmodells Einschränkungen getroffen werden, die die allgemeine Gültigkeit der Aussagen nicht verletzen.

Für den Rest des Abschnitts 3.3 setze wir fest:

**Voraussetzung 3.28.** *Es sei*

$a \in L^+$ ,

$H_1, H_2, H_3$  und  $H_4$  die Gebiete von  $a$  nach Definition 3.27,

$b \in \mathbb{R}^2$  mit folgenden Einschränkungen:

$a_x \geq 0$  : Symmetrie zu  $L$ ,

$|a_y| \leq |b_y|$  : ggf. Vertauschung der Punkte,

$a_x \leq b_x$  : Symmetrie des Laufbandmodells.

Mit diesen Einschränkungen können wir ein Lemma formulieren.

**Lemma 3.29.** *Für  $a, b$  gelten die Voraussetzungen 3.28, sowie  $b \notin \{a, a^*\}$ .*

*Dann verläuft der Bisektor nicht in  $\mathcal{F}_l(a) \cap \mathcal{F}_l(b)$ .*

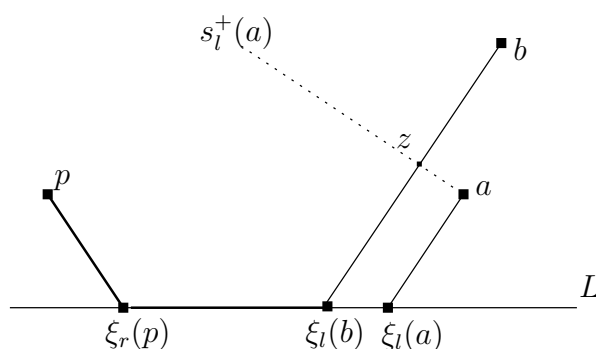


Abbildung 3.14:  $p \in \mathcal{F}_l(a) \cap \mathcal{F}_l(b)$

*Beweis.*

$|a_y| \leq |b_y|$  ergibt direkt  $d_e(\xi_l(a), a) \leq d_e(\xi_l(b), b)$ . (\*)

Annahme:  $\exists p \in \overline{B_L(a, b)} \cap \mathcal{F}_l(a) \cap \mathcal{F}_l(b)$ . Damit haben die Polygonzüge  $p \xi_r(p) \xi_l(a) a$  und  $p \xi_r(p) \xi_l(b) b$  den gleichen Zeitaufwand. Es gilt dann

$$d_v(\xi_r(p), \xi_l(a)) + d_e(\xi_l(a), a) = d_v(\xi_r(p), \xi_l(b)) + d_e(\xi_l(b), b). \quad (3.19)$$

Mit (\*) folgt, dass  $\xi_l(b)$  links von  $\xi_l(a)$  liegen muss. Eingesetzt in (3.19) ergibt sich

$$d_v(\xi_l(b), a) = d_v(\xi_l(b), \xi_l(a)) + d_e(\xi_l(a), a) = d_e(\xi_l(b), b). \quad (3.20)$$

Das Segment  $\overline{(\xi_l(b), b)}$  verläuft links parallel zu  $\overline{(\xi_l(b), a)}$ . Damit schneidet es die Stützlinie  $s_l^+(a)$  senkrecht in einen Punkt  $z$ . Nach Definition der Stützlinien folgt,  $d_v(\xi_l(b), a) = d_e(z, \xi_l(b))$ , also  $z = b$ . Da aber die Punkte auf  $s_l^+(a)$  links von  $a$  liegen, folgt  $a = z = b$ , was aber ein Widerspruch zur Voraussetzung des Lemmas ist.  $\square$

**Bemerkung.** Der Fall  $b = a^*$  wird später gesondert besprochen.

Wir unterscheiden nun die folgenden Fälle nach der Lage von  $b$  zu  $a$ :

1.  $b \in H_2$  :  $a$  und  $b$  in der gleichen Halbebene,
2.  $b \in H_3$  :  $a$  und  $b$  in verschiedenen Halbebenen,
3.  $b \in H_1 \cup H_4$  :  $a$  dominiert  $b$ ,
4.  $b \in s_r^+(a) \cup s_r^-(a)$  :  $a$  und  $b$  haben gleiche Stützlinien.

### 3.3.1 Punkte in der gleichen Halbebene

Das Ergebnis dieses Abschnittes ist folgendes Lemma.

**Lemma 3.30.** *Unter der Voraussetzung 3.28 sei  $b \in H_2$ .*

*Dann ist der Bisektor  $B_L(a, b)$  eine Kurve, die monoton zur Y-Achse verläuft und maximal aus sechs Teilstücken besteht, nämlich aus zwei Halbgeraden, sowie Liniensegmenten und Parabelstücken. Es gilt*

$$B_L(a, b) = \sum_{i=1}^6 \gamma_i \text{ mit}$$

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= B(a, b) \text{ auf } L^+ \cap \mathcal{G}(a) \cap \mathcal{G}(b) \\ \gamma_2 &= B(s_r^-(a), b) \text{ auf } L^+ \cap \mathcal{F}_r(a) \cap \mathcal{G}(b) \\ \gamma_3 &= B(s_r^-(a), s_l^-(b)) \text{ auf } L^+ \cap \mathcal{F}_r(a) \cap \mathcal{F}_l(b) \\ \gamma_4 &= B(s_r^+(a), s_l^+(b)) \text{ auf } L^- \cap \mathcal{F}_r(a) \cap \mathcal{F}_l(b) \\ \gamma_5 &= B(s_r^+(a), b) \text{ auf } L^- \cap \mathcal{F}_r(a) \cap \mathcal{G}(b) \\ \gamma_6 &= B(a, b) \text{ auf } L^- \cap \mathcal{G}(a) \cap \mathcal{G}(b). \end{aligned}$$

Den allgemeinen Verlauf zeigt die Abbildung 3.15.

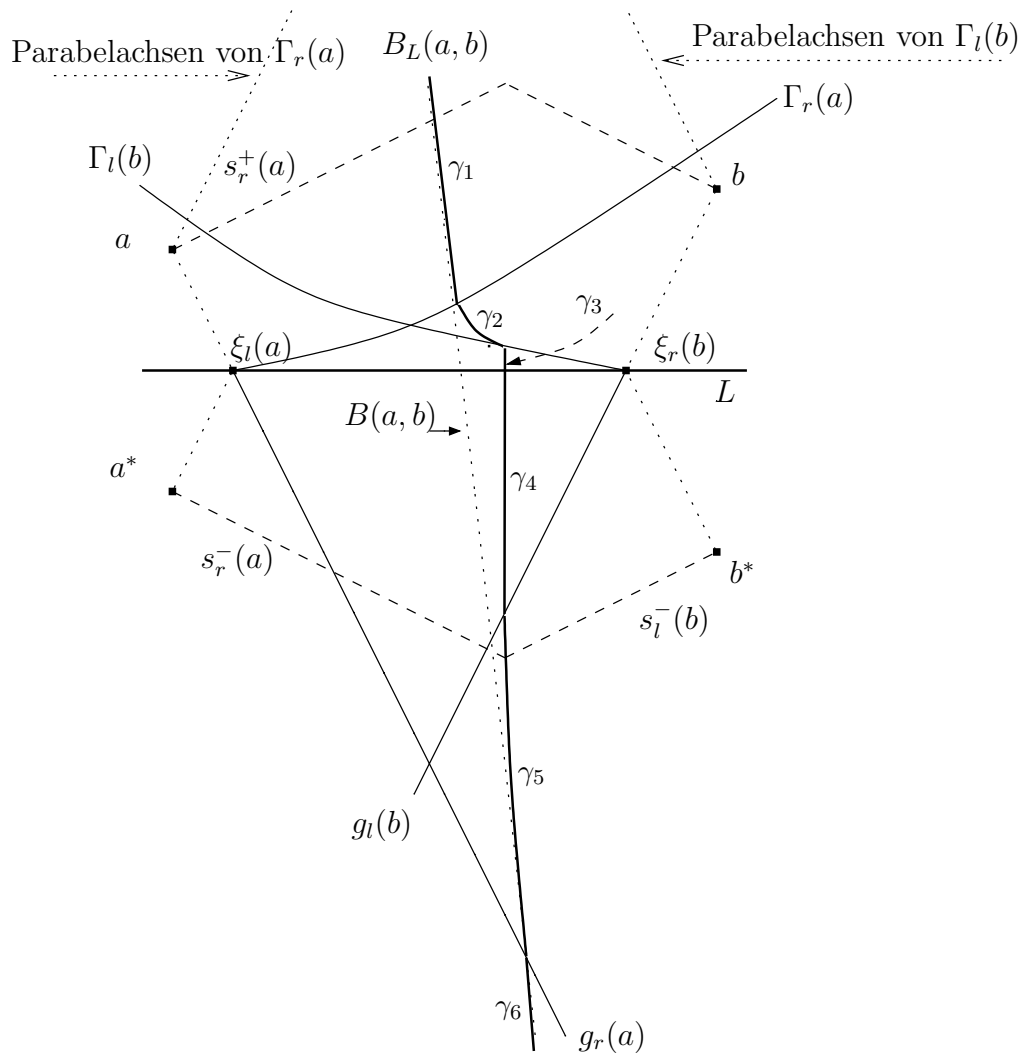


Abbildung 3.15: Bisektor  $B_L(a, b)$  mit  $b \in H_2(a)$

*Beweis von Lemma 3.30.*

Wir betrachten zuerst den euklidischen Bisektor  $B(a, b)$  und dessen Verlauf in  $L^+$ . Da  $B(a, b)$  senkrecht zu  $\overline{ab}$  liegt und  $\overline{ab}$  eine geringe Steigung als die Stützgeraden  $s_r^+(a)$  und  $s_r^+(b)$  hat, hat  $B(a, b)$  eine stärkere Steigung als die Parabelachsen von  $\Gamma_l(a)$  und  $\Gamma_l(b)$ . Damit liegt ein unbeschränkter Teil von  $B(a, b)$  in  $\mathcal{G}(a) \cap \mathcal{G}(b)$ ; diesen Teil nennen wir  $\gamma_1$ . Es ist nun möglich, dass ganz  $B(a, b) \cap L^+$  in  $\mathcal{G}(a) \cap \mathcal{G}(b)$  liegt. Ansonsten trifft, weil  $a_y < b_y$ ,  $B(a, b)$  auf  $\Gamma_r(a)$  in einem Punkt  $p_1$ . Ab dieser Grenze verläuft der Bisektor  $B_L(a, b)$  in  $\mathcal{F}_r(a) \cap \mathcal{G}(b)$ . Hier entspricht  $B_L(a, b)$  dem euklidischen Bisektor  $B(s_r^-(a), b)$ ; diesen Teil nennen wir  $\gamma_2$ .  $\gamma_2$  entspricht als Bisektor eines Punktes mit einer Halbgeraden einer Parabel mit Leitlinie  $s_r^-(a)$  und Brennpunkt  $b$ . Da für  $p$  auf  $g_r^+(a)$  gerade  $d_e(a, p_1) = d_e(s_r^-(a), p_1)$  gilt, ist somit  $\gamma_2$  die stetige Fortsetzung von  $\gamma_1$ .

$B(s_r^-(a), b)$  kann nun  $L$  oder die Grenze  $\Gamma_l(b)$  in einem Punkt  $p_2$  erreichen. Im zweiten Fall verläuft der Bisektor  $B_L(a, b)$  von da an in  $\mathcal{F}_r(a) \cap \mathcal{F}_l(b)$  und wird dort durch den euklidischen Bisektor  $B(s_r^-(a), s_l^-(b))$  bestimmt. Die beiden Halbgeraden schneiden sich in einem Punkt  $q$ . Ihr Bisektor wird also durch die vier Winkelhalbierenden in  $q$  gebildet, von denen aber nur eine auch in  $L^+$  verläuft, nämlich die Senkrechte von  $q$  auf  $L$ . Ist  $p_3$  der Fußpunkt von  $q$  auf  $L$ , so ist somit das Liniensegment  $\gamma_3 := \overline{p_2 p_3}$  der restliche Teil von  $B_L(a, b)$  auf  $L^+$ .

Auf  $L^-$  verfolgen wir den Bisektor  $B_L(a, b)$  entsprechend, ohne die Einzelheiten zu erläutern. Auf  $\mathcal{F}_r(a) \cap \mathcal{F}_l(b)$  entspricht der Bisektor einem Liniensegment  $\gamma_4$  bis zu einem Punkt  $p_4$  auf  $g_l(b)$ . Von da an verläuft der Bisektor  $B_L(a, b)$  wieder in  $\mathcal{F}_r(a) \cap \mathcal{G}(b)$ . Hier entspricht er diesmal einem Parabelstück  $\gamma_5$  von  $B(s_r^+(a), b)$ , das in einem Punkt  $p_5$  auf  $g_r(a)$  endet. Von diesem Punkt an verläuft  $B_L(a, b)$  auf  $\mathcal{G}(a) \cap \mathcal{G}(b)$  und entspricht somit wieder einem Teil des Bisektors  $B(a, b)$ . Diesem Teil nennen wir  $\gamma_6$ . Für den Bisektor von  $a$  und  $b$  gilt somit

$$B_L(a, b) = \sum_{i=1}^6 \gamma_i.$$

Hierbei sind  $\gamma_1$  und  $\gamma_6$  Halbgeraden;  $\gamma_2$  und  $\gamma_5$  sind Parabelstücke;  $\gamma_3$  und  $\gamma_4$  sind Liniensegmente, die senkrecht zu  $L$  verlaufen.

Es können die Teilstücke  $\gamma_2$  bis  $\gamma_5$  verschwinden. Liegt zum Beispiel der Eintrittspunkt  $\xi_l(b)$  links von  $\xi_r(a)$ , so verläuft der Bisektor ganz in  $\mathcal{G}(a) \cap \mathcal{G}(b)$  und entspricht damit der Geraden  $B(a, b)$  und besteht nur aus den Teilen  $\gamma_1$  und  $\gamma_6$ . Man beachte aber die Voraussetzung, dass  $b$  aus  $H_2$  gewählt wurde.  $\square$

### 3.3.2 Punkte in verschiedenen Halbebenen

Den Verlauf des Bisektors für  $b \in H_3$  beinhaltet das folgende Lemma und die Abbildung 3.16. Der Beweis wird analog dem vorherigen Fall mit  $b \in H_2$  geführt, wodurch ich auf die genaue Durchführung des Beweises verzichte.

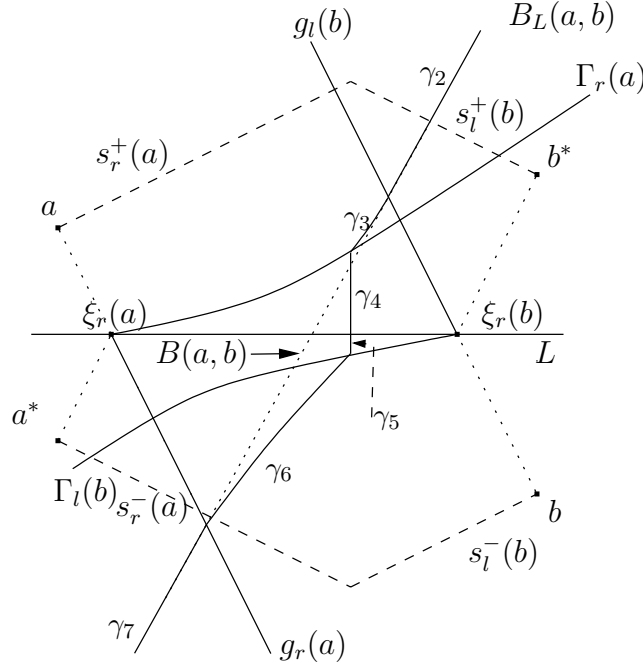


Abbildung 3.16: Bisektor  $B_L(a, b)$  mit  $b \in H_3$

**Lemma 3.31.** *Unter der Voraussetzung 3.28 sei  $b \in H_3$ . Dann ist der Bisektors  $B_L(a, b)$  eine Kurve, die monoton zur Y-Achse verläuft und aus maximal acht Teilstücken besteht, nämlich aus Halbgeraden, Liniensegmenten und Parabelstücken.*

Es gilt  $B_L(a, b) = \sum_{i=1}^8 \gamma_i$  mit

$$\begin{aligned}
 \gamma_1 &= B(a, s_r^-(b)) \quad \text{auf} \quad L^+ \cap \mathcal{G}(a) \cap \mathcal{F}_r(b) \\
 \gamma_2 &= B(a, b) \quad \text{auf} \quad L^+ \cap \mathcal{G}(a) \cap \mathcal{G}(b) \\
 \gamma_3 &= B(a, s_l^-(b)) \quad \text{auf} \quad L^+ \cap \mathcal{G}(a) \cap \mathcal{F}_l(b) \\
 \gamma_4 &= B(s_r^-(a), s_l^-(b)) \quad \text{auf} \quad L^+ \cap \mathcal{F}_r(a) \cap \mathcal{F}_l(b) \\
 \gamma_5 &= B(s_r^+(a), s_l^+(b)) \quad \text{auf} \quad L^- \cap \mathcal{F}_r(a) \cap \mathcal{F}_l(b) \\
 \gamma_6 &= B(s_r^+(a), b) \quad \text{auf} \quad L^- \cap \mathcal{F}_r(a) \cap \mathcal{G}(b) \\
 \gamma_7 &= B(a, b) \quad \text{auf} \quad L^- \cap \mathcal{G}(a) \cap \mathcal{G}(b) \\
 \gamma_8 &= B(s_l^+(a), b) \quad \text{auf} \quad L^- \cap \mathcal{F}_l(a) \cap \mathcal{G}(b).
 \end{aligned}$$

**Bemerkung.**  $\gamma_1$  und  $\gamma_8$  sind unbeschränkte Parabelstücke.

Gilt  $|\frac{b_y - a_y}{b_x - a_x}| \leq \frac{1}{\sqrt{v^2 - 1}}$ , so ist  $\gamma_1 = \emptyset$  und  $\gamma_8 = \emptyset$ .

*Beweis.*

Für  $\gamma_2$  bis  $\gamma_7$  kann man analog zu Lemma 3.30 vorgehen. Die Existenz von  $\gamma_1$  und  $\gamma_8$  hängt von der Steigung des Bisekors  $B(a, b)$  ab. Ist die Steigung geringer als die Steigung der Grenzgeraden  $g_l(a)$  und  $g_r(b)$ , so schneidet der Bisektor  $B(a, b)$  diese beiden Geraden. An den Schnittpunkten wird  $B_L(a, b)$  durch die Parabeln  $\gamma_1$  und  $\gamma_8$  fortgesetzt. Die Steigungen der Grenzgeraden hängen natürlich vom Laufbandwinkel, also von der Geschwindigkeit  $v$  ab.  $\gamma_1$  hat den gleichen Brennpunkt  $a$  wie  $\Gamma_r(a)$ . Ihre Leitlinien  $s_r^-(a)$  und  $s_r^-(b)$  verlaufen zueinander parallel. Die beiden Parabeln schneiden sich nicht.  $\gamma_1$  verläuft somit unbeschränkt in  $\mathcal{G}(a) \cap \mathcal{F}_r(b)$ . Entsprechendes gilt für  $\gamma_8$ .  $\square$

### 3.3.3 Dominanz eines Punktes

Wir sprechen von Dominanz des Punktes  $a$  über  $b$ , wenn  $b$  in  $H_1$  oder  $H_4$  liegt. Die Motivation dieser Definition ist folgende Aussage:  $b$  wird vom Laufband „ausgeschlossen“, d.h. Punkte, deren schnellste Verbindung zu  $b$  über das Laufband führen, haben zu  $a$  eine geringere Distanz. Zur genaueren Darstellung unterteilen wir nach den Gebieten  $H_1$  und  $H_4$ .

#### 1. $b \in H_1$

Auch in diesem Fall formulieren wir das entsprechende Lemma. Die Abbildung 3.17 zeigt einen möglichen Verlauf.

**Lemma 3.32.** *Unter der Voraussetzung 3.28 sei  $b \in H_1$ . Dann ist der Bisektor  $B_L(a, b)$  eine Kurve, die ganz in  $L^+ \cap \mathcal{G}(b)$  verläuft, bestehend aus einem Liniensegment und zwei unbeschränkten Parabelstücken, nämlich*

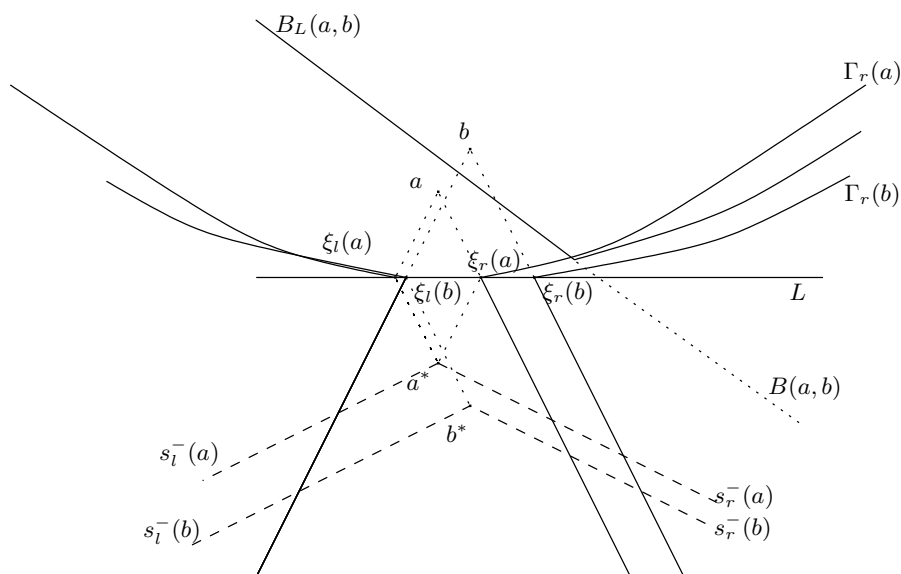
$$B_L(a, b) = \sum_{i=1}^3 \gamma_i \text{ mit}$$

$$\gamma_1 = B(s_l^-(a), b) \quad \text{auf} \quad \mathcal{F}_l(a),$$

$$\gamma_2 = B(a, b) \quad \text{auf} \quad \mathcal{G}(a),$$

$$\gamma_3 = B(s_r^-(a), b) \quad \text{auf} \quad \mathcal{F}_r(a).$$



Abbildung 3.17:  $B_L(a, b)$  mit  $b \in H_1$ 

*Beweis.*

Dieser Fall hat die folgende Besonderheit: Die Verbindung von  $b$  mit seinem Eintrittspunkt  $\xi_r(b)$  schneidet  $s_r^+(a)$ , was bedeutet, dass der Weg von  $\xi_r(b)$  nach  $a$  kürzer ist als nach  $b$ , und damit für einen Punkt  $p \in \mathcal{F}_r(b)$ , (dessen Laufbandweg zu  $b$  über  $\xi_r(b)$  führt,)  $d_v(a, p) < d_v(b, p)$  gilt. Damit folgt nun direkt  $B_L(a, b) \cap \mathcal{F}_r(b) = \emptyset$ , also  $B_L(a, b) \subset \mathcal{G}(b)$ . Eine Folge davon ist, dass der Bisektor die Gerade  $L$  nicht schneiden kann.

Auf  $\mathcal{G}(a) \cap \mathcal{G}(b)$  stimmt der Bisektor  $B_L(a, b)$  mit dem euklidischen Bisektor  $B(a, b)$  überein. Da der Mittelpunkt von  $a$  und  $b$  dazu gehört, existiert ein Bisektorstück auf  $\mathcal{G}(a) \cap \mathcal{G}(b)$ . Die Lage von  $B(a, b)$  zur Parabelachse von  $\Gamma_l(a)$  erzwingt einen Schnitt. Ebenso muss  $B(a, b)$  auch  $\Gamma_r(a)$  schneiden. An diesen Stellen wird  $B_L(a, b)$  auf  $\mathcal{F}_l(a) \cap \mathcal{G}(b)$  mit  $B(s_l^-(a), b)$  und auf  $\mathcal{F}_r(a) \cap \mathcal{G}(b)$  mit  $B(s_r^-(a), b)$  stetig fortgesetzt. Diese Bisektoren sind Parabeln. Da  $B_L(a, b) \subset \mathcal{G}(b)$ , können sie die Grenzparabeln  $\Gamma_l(b)$  und  $\Gamma_r(b)$  nicht schneiden. Sie können aber auch nicht  $\Gamma_l(a)$  bzw.  $\Gamma_r(a)$  schneiden, da sie die gleichen Leitlinien  $s_l^-(a)$  und  $s_r^-(a)$  haben.

$B(s_l^-(a), b)$  verläuft somit unbeschränkt auf  $\mathcal{F}_l(a) \cap \mathcal{G}(b)$  und  $B(s_r^-(a), b)$  verläuft unbeschränkt auf  $\mathcal{F}_r(a) \cap \mathcal{G}(b)$ .  $\square$

## 2. $b \in H_4$

Dieser Fall ist dem vorherigen ähnlich, da aus gleichen Überlegungen  $B_L(a, b) \subset \mathcal{G}(b)$  und  $B_L(a, b) \subset L^-$  gilt. Die Abbildung 3.18 zeigt einen möglichen Verlauf.

**Lemma 3.33.** *Unter der Voraussetzung 3.28 sei  $b \in H_4$ . Dann ist der Bisektor  $B_L(a, b)$  eine Kurve, die ganz in  $L^- \cap \mathcal{G}(b)$  verläuft, bestehend aus einem Liniensegment und zwei unbeschränkten Parabelstücken, nämlich*

$$B_L(a, b) = \sum_{i=1}^3 \gamma_i \text{ mit}$$

$$\gamma_1 = B(s_l^+(a), b) \quad \text{auf} \quad \mathcal{F}_l(a)$$

$$\gamma_2 = B(a, b) \quad \text{auf} \quad \mathcal{G}(a)$$

$$\gamma_3 = B(s_r^+(a), b) \quad \text{auf} \quad \mathcal{F}_r(a).$$

*Beweis.*

Der Beweis erfolgt analog zu Lemma 3.32, wobei die Übergänge von  $\gamma_2$  zu  $\gamma_1$  und  $\gamma_3$  an den Grenzgerade  $g_l(a)$  und  $g_r(a)$  erfolgen.  $\square$

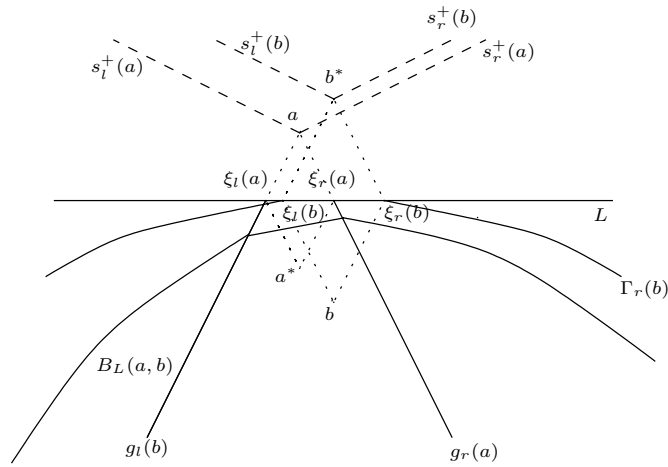


Abbildung 3.18: Bisektor  $B_L(a, b)$  mit  $b \in H_4(a)$

### 3.3.4 Punkte mit gleicher Stützlinie

Abschließend betrachten wir einen besonderen Fall. Der Punkt  $b$  kann auf einer der Stützlinie von  $a$  von liegen. Es kann sogar  $b = a^*$  gelten. Wir erhalten einen Bisektor, der eine Fläche beinhaltet. Wir unterscheiden, auf welcher Stützlinie  $b$  liegt.

1.  $b \in s^+(a)$

Mit der Voraussetzung 3.28 gelte  $b \in s_r^+(a)$ . Die Abbildung 3.19 zeigt ein Beispiel.

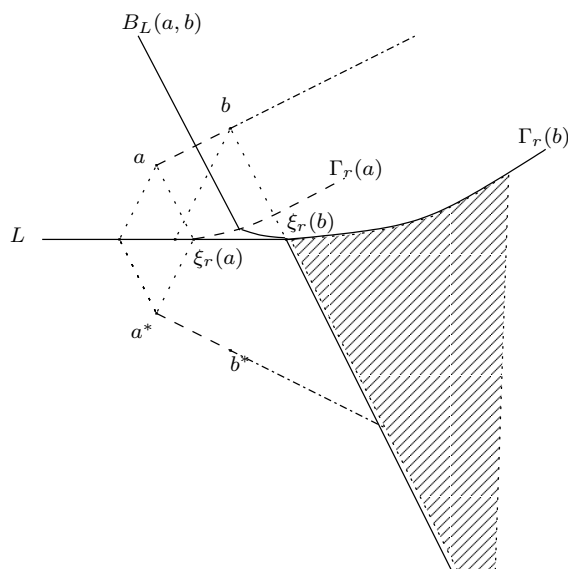


Abbildung 3.19: Bisektor  $B_L(a, b)$  bei gleicher Stützlinie

**Lemma 3.34.** Sei  $b \in s^+(a)$ , so ist der Bisektor zusammenhängend und besteht aus einer Halbgeraden, einem Parabelstück und eine Fläche. Genauer:

$$B_L(a, b) = \begin{cases} B(a, b) & \text{auf } \mathcal{G}(a) \cap \mathcal{G}(b) \\ B(s_r^-(a), b) & \text{auf } \mathcal{F}_r(a) \cap \mathcal{G}(b) \\ \mathcal{F}_r(b) & \text{auf } \mathcal{F}_r(a) \cap \mathcal{F}_r(b) \end{cases}$$

*Beweis.*

Wir betrachten den Eintrittspunkt  $\xi_r(b)$ . Da  $b \in s_r^+(a)$  und weil  $\overline{b\xi_r(b)}$  senkrecht auf  $s_r^+(a)$  steht, gilt :

$$d_e(b, \xi_r(b)) = d_e(s_r^+(a), \xi_r(b)) = d_v(a, \xi_r(b))$$

Da  $\xi_r(a)$  links von  $\xi_r(b)$  liegt, folgt für alle Punkte  $p \in \mathcal{F}_r(a) \cap \mathcal{F}_r(b)$  :

$$d_v(a, p) = d_v(b, p).$$

Mit  $\mathcal{F}_r(b) \subset \mathcal{F}_r(a)$  erhält man:

$$\mathcal{F}_r(b) \subset B_L(a, b).$$

Das Parabelstück  $B(s_r^-(a), b)$  des Bisektors auf  $\mathcal{F}_r(a) \cap \mathcal{G}(b)$  beginnt in  $\xi_r(b)$ . Auf  $\mathcal{G}(a) \cap \mathcal{G}(b)$  wird das Parabelstück dann mit  $B(a, b)$  fortgesetzt.  $\square$

## 2. $b \in s^-(a)$

Dieser Fall entspricht dem vorhergehenden, nur dass hier das Parabelstück und die Halbgerade in  $L^-$  verlaufen.

**Lemma 3.35.** *Sei  $b \in s^-(a)$ , so ist der Bisektor zusammenhängend und besteht aus einer Halbgerade, einem Parabelstück und einer Fläche. Genauer:*

$$B_L(a, b) = \begin{cases} B(a, b) & \text{auf } \mathcal{G}(a) \cap \mathcal{G}(b) \\ B(s_r^+(a), b) & \text{auf } \mathcal{F}_r(a) \cap \mathcal{G}(b) \\ \mathcal{F}_r(b) & \text{auf } \mathcal{F}_r(a) \cap \mathcal{F}_r(b) \end{cases}$$

*Beweis.*

Der rechte Eintrittspunkt  $\xi_r(b)$  hat zu  $a$  und  $b$  den gleichen Abstand. Damit gilt  $\xi_r(b) \in B_L(a, b)$ . Der Rest des Beweises verläuft analog dem Beweis zu Lemma 3.34.  $\square$

Ein besonderer Fall tritt für  $b = a^*$  ein. Sicher gehört ganz  $L$  zum Bisektor. Da aber beide Punkte die gleichen Eintrittspunkte auf  $L$  haben, besteht der Bisektor zusätzlich aus zwei Flächen, nämlich  $\mathcal{F}_l(a) \cap \mathcal{F}_l(b)$  und  $\mathcal{F}_r(a) \cap \mathcal{F}_r(b)$ .

### 3.3.5 Zusammenfassung

In diesem Abschnitt haben wir den Bisektor im Laufbandmodell untersucht. Er setzt sich zusammen aus Teilen euklidischer Bisektoren von Liniensegmenten. Der Verlauf des Bisektors hängt von der Lage der Punkte zu einander ab. Hierbei ist er in den überwiegenden Fällen eine Kurve, die aus Halbgeraden, Liniensegmenten und (unbeschränkten) Parabelstücken besteht. Überlagern sich die Stützlinien der Punkte, so beinhaltet der Bisektor auch Flächen. Dieser Fall tritt dann ein, wenn ein Punkt auf einer Stützlinie des anderen Punktes liegt.

## 3.4 Die Voronoi-Region

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Voronoi-Region eines Punktes im Laufbandmodell  $\mathcal{L} = (\mathbb{R}^2, L, v)$ .  $L$  sei hierbei wieder die X-Achse. Wir werden sehen, dass sich die Voronoi-Regionen des Laufbandmodells auf euklidische Voronoi-Regionen von Liniensegmenten zurückführen lassen. Um die Lesbarkeit zu erhöhen, werden  $L^+$  und  $L^-$  um die Gerade  $L$  erweitert.

In diesem Abschnitt sei  $\mathcal{A} := \{a_1, \dots, a_n\}$  eine endliche Menge von Punkten. Wir beginnen mit der Definition der Voronoi-Regionen.

**Definition 3.36.** Für einen Punkt  $a \in \mathcal{A}$  definieren wir seine Voronoi-Region durch

$$VR_L(a, \mathcal{A}) := \{p \in \mathbb{R}^2 \mid \forall b \in \mathcal{A} \setminus \{a\} : d_v(a, p) < d_v(b, p)\}.$$

Aus der Definition ergeben sich direkt die folgenden Eigenschaften.

**Lemma 3.37.** *Sei  $a \in \mathcal{A}$ , so ist  $VR_L(a, \mathcal{A})$  offen und zusammenhängend. Die Ränder der Voronoi-Region werden durch die Bisektoren von  $a$  mit anderen Punkten aus  $\mathcal{A}$  gebildet.*

*Beweis.*

Aufgrund der Ungleichung in Definition 3.36 gibt es zu jedem Punkt  $p \in VR_L(a, \mathcal{A})$  noch eine  $\varepsilon$ -Umgebung, die ganz in  $VR_L(a, \mathcal{A})$  liegt. Der schnellste Weg von einem Punkt  $p \in VR_L(a, \mathcal{A})$  nach  $a$  verläuft ganz in  $VR_L(a, \mathcal{A})$ . Da  $a$  selbst in  $VR_L(a, \mathcal{A})$  liegt, können zwei Punkte über  $a$  in  $VR_L(a, \mathcal{A})$  verbunden werden.  $\square$

Wir kommen nun zum ersten zentralen Satz des Abschnitts.

**Satz 3.38.** *Sei  $\mathcal{L}$  ein Laufbandmodell und  $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\}$  eine endliche Menge von Punkten. Für einen Punkt  $a_i \in \mathcal{A}$  definieren wir  $A_i^+ := \{a_i\} \cup s^-(a_i)$  und  $A_i^- := \{a_i\} \cup s^+(a_i)$ . Weiter sei  $S^+ := \bigcup_{i=1}^n A_i^+$  und  $S^- := \bigcup_{i=1}^n A_i^-$ . Für  $a_i \in \mathcal{A}$  gilt dann*

$$VR_L(a_i, \mathcal{A}) = [L^+ \cap VR_e(A_i^+, S^+)] \cup [L^- \cap VR_e(A_i^-, S^-)]. \quad (3.21)$$

**Bemerkung.** Der Satz besagt, dass die Voronoi-Region  $VR_L(a, \mathcal{A})$  aus den entsprechenden euklidischen Voronoi-Regionen von  $a$  und seinen Stützlinien zusammengesetzt werden kann.<sup>3</sup> Hierbei benutzen wir die allgemeine Definition einer Voronoi-Region mit

$$VR_e(U, S) := \{p \mid \exists u \in U, \forall s \in S \setminus U : d_e(u, p) < d_e(s, p)\}.$$

*Beweis.*

Der Beweis folgt direkt aus Satz 3.23. Sei dazu  $a_i \in \mathcal{A}$  beliebig. Nach Satz 3.23 gilt für alle  $p \in L^+$  die Gleichung

$$d_v(a, p) = \min \{d_e(p, a), d_e(p, s^-(a))\} \quad (3.22)$$

Also  $d_v(a, p) = d_e(A^+, p)$ . Analog gilt  $d_v(a, p) = d_e(A^-, p)$  für  $p \in L^+$ .  $\square$

Von nun an sei  $a \in \mathcal{A}$  fest gewählt und o.E. sei  $a \in L^+$ .

Wir wollen nun untersuchen, wann die Voronoi-Region  $VR_L(a, \mathcal{A})$  beschränkt ist. Die Ergebnisse sind im Satz 3.43 zusammengefasst.

Nach Satz 3.38 kann man die Beschränktheit der entsprechenden euklidischen Voronoi-Regionen von  $a$  und deren Stützlinien betrachten. Das führt uns wieder zur Unterscheidung der Geh- und Bandbereiche von  $a$ . Wir fragen nun, wann  $VR_L(a, \mathcal{A})$  auf  $\mathcal{G}(a)$ ,  $\mathcal{F}_l(a)$  und  $\mathcal{F}_r(a)$  beschränkt ist. Hierzu erinnern wir uns an die Teilung von  $\mathbb{R}^2$  durch die Stützlinien von  $a$  in  $H_1, \dots, H_4$ . Wir behalten  $H_1$  und  $H_4$ , definieren aber  $H_r$  und  $H_l$  neu, indem wir die Stützgeraden über die Punkte  $a$  und  $a^*$  verlängern bis sie auf  $L$  treffen. Das Gebiet, das  $s_r^+(a)$  und  $s_r^-(a)$  einschließen, nennen wir  $H_r$ , das  $s_l^+(a)$  und  $s_l^-(a)$  nennen wir entsprechend  $H_l$  (vgl. Abbildung 3.20).

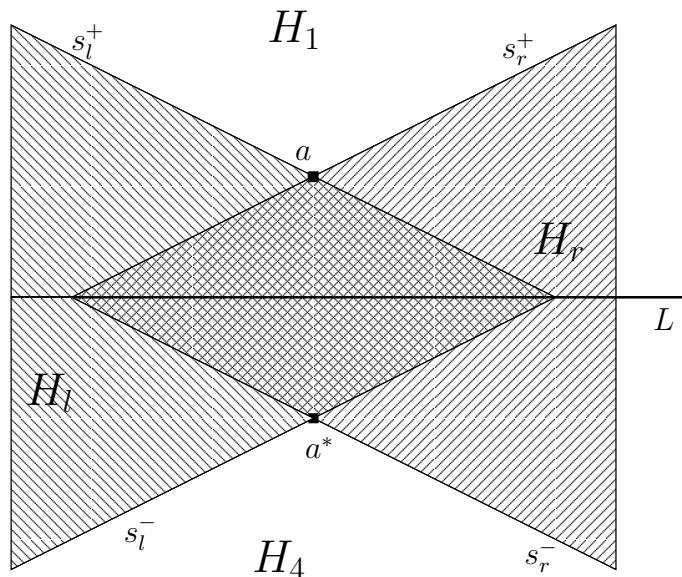
Die Gebiete  $H_1$ ,  $H_4$ ,  $H_l$  und  $H_r$  werden in Abhängigkeit von  $a$  definiert. Werden diese Gebiete von verschiedenen Punkten abgeleitet, so werden sie entsprechend gekennzeichnet. Für  $a \notin L$  gilt natürlich  $H_l \cap H_r \neq \emptyset$ .

Die Motivation dieser Einteilung von  $\mathbb{R}^2$  zeigt bereits das folgenden Lemma.

**Lemma 3.39.**

$$\exists b \in \mathcal{A} \cap \overline{H_r(a)} \iff \mathcal{F}_r(a) \cap VR_L(a, \mathcal{A}) \text{ beschränkt.} \quad (3.23)$$

<sup>3</sup>Die gemeinsamen Grenzen werden ebenfalls hinzugenommen.

Abbildung 3.20: Die Gebiete  $H_1$ ,  $H_r$ ,  $H_l$  und  $H_4$ 

*Beweis.*

Der Beweis benutzt die gleiche Argumentation wie in den Untersuchungen zu den Bisektoren.

$\Rightarrow$ : Sei  $b \in \mathcal{A} \cap \overline{H_r(a)}$ . Liegt der Eintrittspunkt  $\xi_r(b)$  links von  $\xi_r(a)$ , also  $\xi_r(b) \leq \xi_r(a)$ , so gilt bereits  $d_v(b, \xi_r(a)) \leq d_e(a, \xi_r(a))$ . D.h.: Die Punkte aus  $\mathcal{F}_r(a)$  können nicht in der Voronoi-Region von  $a$  liegen. Liegt der Eintrittspunkt  $\xi_r(b)$  rechts von  $\xi_r(a)$ , so wird  $\mathcal{F}_r(a) \cap VR_L(a, \mathcal{A})$  durch den Bisektor  $B_L(a, b)$  beschränkt ( $b \in H_2$ , vgl. Abschnitte 3.3.1 und 3.3.2 mit den Abbildung 3.15 und 3.16).

$\Leftarrow$ : Annahme,  $\mathcal{A} \cap \overline{H_r(a)} = \emptyset$ . Dann liegen alle Punkte des Laufbandes, die rechts von  $\xi_r(a)$  liegen, in der Region von  $a$ . Da diese Punkte eine Halbgerade bilden, für die Annahme zum Widerspruch der Voraussetzung, dass  $\mathcal{F}_r(a) \cap VR_L(a, \mathcal{A})$  beschränkt ist.. Die Menge  $\mathcal{A} \cap \overline{H_r(a)}$  ist nicht leer.  $\square$

**Bemerkung.** Entsprechend gilt

$$\exists b \in \mathcal{A} \cap \overline{H_l(a)} \iff \mathcal{F}_l(a) \cap VR_L(a, \mathcal{A}) \text{ beschränkt.}$$

Mit dem Lemma haben wir die Beschränktheit der Bandbereiche schon ausreichend charakterisiert. Kommen wir nun zu Laufbereich  $\mathcal{G}(a)$ . Aus Lemma 3.25 erhalten wir bereits die folgende Implikation.

**Lemma 3.40.**

$$\exists b \in H_1(a) \implies VR_L(a, \mathcal{A}) \cap \mathcal{G}^+(a) \text{ beschränkt.}^4 \quad (3.24)$$

*Beweis.*

In Lemma 3.25 wird gezeigt, dass der Bisektor  $B_L(a, b) \cap \mathcal{G}(a) \cap L^+$  durchschneidet. Der begrenzte Teil liegt näher an  $a$ , der unbeschränkte Teil näher an  $b$ . Man vergleiche hierzu Abbildung 3.11.  $\square$

$b \in H_1(a)$  stellt jedoch keine notwendigen Bedingung dar. Die Begrenzung von  $\mathcal{G}(a)$  kann auch durch Punkte erfolgen, die nicht in  $H_1$  liegen. Auf  $\mathcal{G}(a)$  entspricht der Laufbandabstand eines Punkte zu  $a$  dem euklidischen Abstand. Gibt es zwei Punkte  $c, d$  aus  $\mathcal{A}$  so, dass  $a$  unterhalb der Strecken  $\overline{cd}$  liegt, dann treffen sich die Bisektoren  $B(a, c)$  und  $B(a, d)$  oberhalb von  $a$ , wodurch sie  $VR_L(a, \mathcal{A}) \cap \mathcal{G}^+(a)$  begrenzen.

Das Punktepaar  $c, d$  und Lemma 3.40 bilden die einzigen Möglichkeiten zur Begrenzung von  $VR_L(a, \mathcal{A}) \cap \mathcal{G}^+(a)$ . Wir fassen das Ergebnis in ein Lemma.

**Lemma 3.41.**  $VR_L(a, \mathcal{A}) \cap \mathcal{G}^+(a)$  ist genau dann beschränkt, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- (a)  $\exists b \in H_1(a) \cap \mathcal{A}$ ,
- (b)  $\exists c, d \in \mathcal{A} : c_x < a_x < d_x \wedge \frac{a_y - c_y}{a_x - c_x} < \frac{d_y - c_y}{d_x - c_x}$ ,

*Beweis.*

„ $\Leftarrow$ “ ist bereits durch die vorangegangene Begründung und Lemma 3.40 gezeigt.

„ $\Rightarrow$ “: Gilt  $H_1(a) \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$ , so sind wir bereits fertig. Ansonsten betrachten wir nun die zu  $L$  senkrechte Halbgerade  $f$ , die in  $a$  beginnt und in  $L^+$  verläuft.  $f$  verläuft in  $\mathcal{G}(a)$ .

Nach Voraussetzung ist  $VR_L(a, \mathcal{A})$  beschränkt. Damit muss  $f$  durch einen Bisektor  $B_L(a, c)$ , ( $c \in \mathcal{A}$ ) in einem Punkt  $z$  geschnitten werden. Da  $z \in f$  und zu  $a$  einen geringeren Abstand hat als zu  $L$ , kann die kürzeste Verbindung zwischen  $z$  und  $c$  auch nur der direkte Fußweg sein. Es gilt also  $B_L(a, c) = B(a, c)$ .

Da  $B(a, c) \cap f$  schneidet, folgt sofort  $c_y > a_y$ .



Natürlich kann es mehrere solcher Punkte in  $\mathcal{A}$  geben. Unter diesen sei  $c$  der Punkt, für den  $|\frac{a_y - c_y}{a_x - c_x}|$  maximal ist. Weiter sei o.E.  $c_x < a_x$ .

Der Bisektor  $B(a, c)$  schneidet die Gerade  $f$ , beschränkt aber  $\mathcal{G}(a)$  nicht, da die Parallele  $\tilde{f}$  von  $B(a, c)$  durch  $a$  (ab  $a$ ) ganz in  $\mathcal{G}(a)$  verläuft. ( $f$  hat zu  $\tilde{f}$  einen geringeren Winkel als zur Parabelachse von  $\Gamma_r(a)$ , wodurch  $\tilde{f}$  diese Parabelgrenze von  $\mathcal{G}(a)$  nicht schneidet.) Wir suchen nun einen Punkt  $d$ , dessen Bisektor mit  $a$  die Gerade  $\tilde{f}$  in  $\mathcal{G}(a)$  schneidet. Auf Grund der Maximalität von  $c$  kann nicht  $d_x < a_x$  gelten. Um Schnitt von  $B(a, d)$  mit  $\tilde{f}$  zu sichern, muss die Bedingung (b) des Lemmas erfüllt sein. (Mit anderen Worten:  $a$  liegt unterhalb von  $\overline{cd}$  bzw.  $\overline{cd}$  schneidet  $H_1(a)$ , vgl. Abbildung 3.21)  $\square$

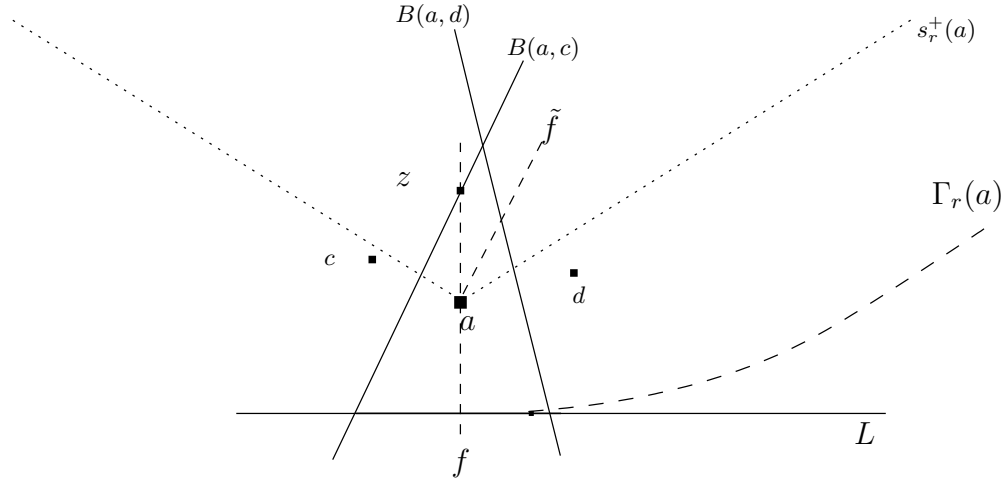


Abbildung 3.21: Begrenzung von  $VR_L(a, \mathcal{A}) \cap \mathcal{G}^+(a)$

Es bleibt noch die Beschränkung von  $\mathcal{G}^-(a) \cap VR_L(a, \mathcal{A})$  zu untersuchen. Wir können hierzu wieder vorhandene Ergebnisse benutzen.

**Lemma 3.42.** *Sei  $a \in L^+ \cap \mathcal{A}$ .  $VR_L(a, \mathcal{A}) \cap \mathcal{G}^-(a)$  ist genau dann beschränkt, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist.*

- (1)  $\exists b \in \mathcal{A} : a \in H_1(b)$ ,
- (2)  $\exists b \in \mathcal{A} : b \in H_4$ ,
- (3)  $\exists b \in \mathcal{A} \cap L^- : |\frac{b_y - a_y}{b_x - a_x}| > \frac{1}{\sqrt{v^2 - 1}}$
- (4)  $\exists c, d \in \mathcal{A} : c_x < a_x < d_x \wedge \frac{a_y - c_y}{a_x - c_x} > \frac{d_y - c_y}{d_x - c_x}$ .

*Beweis.*

„ $\Leftarrow$ “: Die Beschränktheit von  $VR_L(a, \mathcal{A}) \cap \mathcal{G}^-(a)$  folgt aus dem Verlauf der entsprechenden Bisektoren. (a) folgt aus Lemma 3.25. (b) folgt aus Lemma 3.26. (c) folgt aus Lemma 3.24, wobei die Bedingung die Existenz von  $\gamma_8$  erzwingt. Ist (d) gegeben, so schneiden sich die Bisektoren  $B(a, c)$  und  $B(a, d)$  und begrenzen damit  $VR_L(a, \mathcal{A}) \cap \mathcal{G}^-(a)$ .

„ $\Rightarrow$ “: Der Beweis erfolgt analog zu Lemma 3.41. Sind (a) bis (c) nicht erfüllt, so muss es zwei Punkte  $c, d \in \mathcal{A}$  geben, die  $VR_L(a, \mathcal{A}) \cap \mathcal{G}^-(a)$  entsprechend (d) begrenzen.  $\square$

Die Ergebnisse bündeln wir nun in einem Satz.

**Satz 3.43.** *Sei  $\mathcal{L}$  ein Laufbandmodell,  $\mathcal{A}$  eine endliche Menge von Punkten und  $a \in \mathcal{A}$ . Die Voronoi-Region  $VR_L(a, \mathcal{A})$  ist genau dann beschränkt, wenn es eine Menge  $\mathcal{B} \subset \mathcal{A} \setminus \{a\}$  gibt, die die folgenden Bedingungen erfüllt:*

- (1)  $\mathcal{B} \cap \overline{H_l(a)} \neq \emptyset$ ,
- (2)  $\mathcal{B} \cap \overline{H_r(a)} \neq \emptyset$ ,
- (3)  $\mathcal{B} \cap H_1(a) \neq \emptyset$   
 $\vee \exists c, d \in \mathcal{A} : c_x < a_x < d_x \wedge \frac{a_y - c_y}{a_x - c_x} < \frac{d_y - c_y}{d_x - c_x}$ ,
- (4)  $\mathcal{B} \cap \overline{H_4(a)} \neq \emptyset$   
 $\vee \exists b \in \mathcal{B} : a \in H_1(b)$   
 $\vee \exists b \in \mathcal{B} \cap L^- : \left| \frac{b_y - a_y}{b_x - a_x} \right| > \frac{1}{\sqrt{v^2 - 1}}$   
 $\vee \exists c, d \in \mathcal{B} : c_x < a_x < d_x \wedge \frac{a_y - c_y}{a_x - c_x} > \frac{d_y - c_y}{d_x - c_x}$ .

*Beweis.*

(1) und (2) folgen aus Lemma 3.39. (3) ist die Aussage von Lemma 3.41. (4) entspricht Lemma 3.42.  $\square$

Wir haben notwendige und hinreichende Bedingungen für die Beschränktheit einer Voronoi-Region im Laufbandmodell kennen gelernt. Es stellt sich nun direkt die Frage, wie viele Punkte für die volle Beschränktheit benötigt werden. Ist die Geschwindigkeit des Laufbandes gleich 1, so entspricht das

Voronoi-Diagramm des Laufbandmodells dem klassischen Voronoi-Diagramm, wo mindestens 3 Punkte für die Beschränkung einer Voronoi-Region benötigt werden. Was sich für eine Bandgeschwindigkeit  $v > 1$  ändert, liefert die folgende Aussage.

**Lemma 3.44.** *Sei  $\mathcal{L}$  Laufbandmodell mit Bandgeschwindigkeit  $v > 1$ . Weiter sei  $a \notin L$  ein Punkt. Dann existieren  $b, c \in \mathbb{R}^2$ , so dass für  $A := \{a, b, c\}$  die Voronoi-Region  $VR_L(a, A)$  beschränkt ist.*

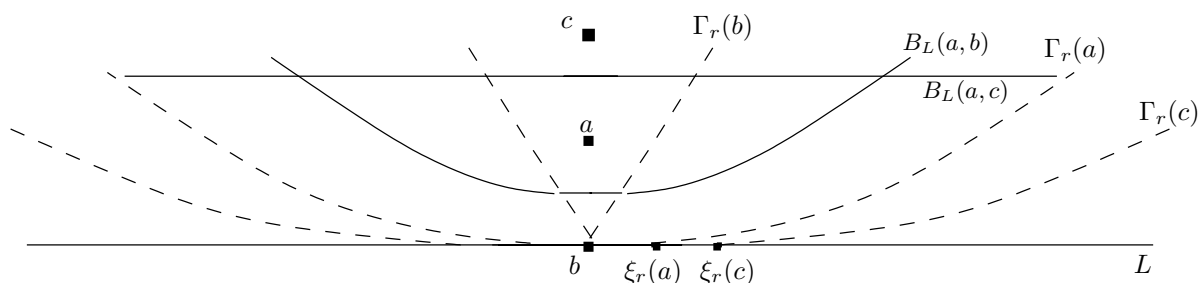


Abbildung 3.22: Begrenzung von  $VR_L(a, \mathcal{A})$  mit zwei Punkten

*Beweis.*

O.E. sei  $a = (a_x, a_y) \in L^+$ ,  $b := (a_x, 0)$  und  $c := (a_x, 2a_y)$ . Damit gilt  $b \in H_r \cap H_l$ . Nach Lemma 3.39 folgt somit, dass  $\mathcal{F}(a) \cap VR_L(a, \mathcal{A})$  beschränkt ist. Da  $a \in H_1(b)$ , folgt nach Lemma 3.42(b), dass  $\mathcal{G}^-(a) \cap VR_L(a, \mathcal{A})$  beschränkt ist. Und  $c \in H_1(a)$  sichert die Beschränktheit von  $\mathcal{G}^-(a) \cap VR_L(a, \mathcal{A})$ .  $\square$

**Bemerkung.** Der Punkt  $b$  im Beweis des Lemmas deckt drei Gebiete ab, wodurch für die Beschränkung von  $VR_L(a, \mathcal{A})$  nur zwei Punkte benötigt werden. Liegt  $a$  jedoch auf  $L$ , so werden mindestens drei Punkte für die Beschränkung benötigt. Das liegt daran, dass in diesem Fall  $H_r \cap H_l = \emptyset$  gilt. Für die Beschränkung von  $\mathcal{F}(a) \cap VR_L(a, \mathcal{A})$  werden zwei Punkte benötigt. Ihre euklidischen Bisektoren mit  $a$  können aber nur einen der beiden Gebiete  $\mathcal{G}^+(a)$  und  $\mathcal{G}^-(a)$  eingrenzen.

### 3.5 Das Voronoi-Diagramm

In diesem Abschnitt befassen wir uns mit dem Voronoi-Diagramm von Punkten im Laufband-Modell. Hierbei interessiert uns, ob das Voronoi-Diagramm als geometrischer Graph darstellbar ist, und welche Eigenschaften ein entsprechender Graph hat, mit der Zielsetzung der Berechnung des Graphen. Das Voronoi-Diagramm im Laufband-Modell lässt sich wieder in Beziehung mit dem Voronoi-Diagramm von Liniensegmenten setzen.

In diesem Abschnitt sein  $\mathcal{L}$  ein Laufbandmodell. Weiter sei  $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\}$  eine Menge von Punkten. Mit  $VR_L(a, \mathcal{A})$  bezeichnen wir die Voronoi-Region von  $a$  im Laufbandmodell.

**Definition 3.45.** Die Menge

$$VD_L(\mathcal{A}) := \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{i=1}^n VR_L(a_i, \mathcal{A})$$

nennen wir das Voronoi-Diagramm von  $\mathcal{A}$  im Laufbandmodell  $\mathcal{L}$ .

Es gilt die entsprechende Beziehung zu den Bisektoren.

**Lemma 3.46.**

$$p \in VD_L(\mathcal{A}) \implies \exists a, b \in \mathcal{A} : p \in B_L(a, b).$$

*Beweis.*

Genau für die Punkte aus  $\bigcup_{i=1}^n VR_L(a_i, \mathcal{A})$  gibt es einen eindeutigen nächsten Punkt aus  $\mathcal{A}$ . □

Die erste Frage, die uns beschäftigt, ist der Zusammenhang des Voronoi-Diagramms. Betrachten wir hierzu einen Sonderfall des euklidischen Voronoi-Diagramms, wo alle Punkte aus  $\mathcal{A}$  auf einer Gerade liegen, speziell einer Parallelen zu  $L$ . Wie man leicht erkennt, besteht auch  $VD_L(\mathcal{A})$  aus den Mittelsenkrechten benachbarter Punkte. Damit ist  $VD_L(\mathcal{A})$  nicht zusammenhängend.

Aber selbst wenn man diesen Sonderfall herausnimmt, existieren Punkte, deren Voronoi-Diagramm nicht zusammenhängend ist. Hierzu zwei Lemmata, wobei das erste Lemma den Sonderfall beinhaltet.

**Lemma 3.47.** *Seien  $a, b, c \in L^+$  Punkte auf einer Geraden mit  $a_x < b_x < c_x$  und  $a_y \leq b_y \leq c_y$ . Weiter sei  $b \in H_2(a)$  und  $c \in H_2(b)$ .*

*Dann ist  $VD_L(\{a, b, c\})$  nicht zusammenhängend.*

*Beweis.*

Man betrachte hierzu Abbildung 3.15 und das Lemma 3.30, das den Verlauf der Bisektoren  $B_L(a, b)$  und  $B_L(b, c)$  charakterisiert. Die unbeschränkten Teile der Bisektoren ( $\gamma_1$  und  $\gamma_6$ ) werden durch die Mittelsenkrechten der Punkte gebildet. Diese Mittelsenkrechten liegen parallel zu einander, wodurch sie sich nicht schneiden. Der dazwischen liegende Teil eines jeden Bisektors kann von den Mittelsenkrechten abweichen, bleibt aber zwischen den Punkten. D.h.  $a_x < p_x < b_x$  für jeden Punkt  $p$  auf  $\gamma_2, \dots, \gamma_5$  von  $B_L(a, b)$ . Dadurch können sich die Bisektoren  $B_L(a, b)$  und  $B_L(b, c)$  nicht schneiden.  $\square$

**Bemerkung.** Es ist ersichtlich, dass man das Lemma auf eine beliebige Menge von Punkten auf einer solchen Geraden erweitern kann.

Nun zum zweiten Fall, in dem die Punkte auf beiden Halbebenen  $L^+$  und  $L^-$  liegen.

**Lemma 3.48.** *Seien  $n, m > 0$  und  $\mathcal{A} = \{a, u_1, \dots, u_n, o_1, \dots, o_m\}$  eine Menge paarweiser verschiedener Punkte. Weiter sei  $\mathbb{R}^2$  in die Bereiche  $H_1(a)$  bis  $H_4(a)$  aufgeteilt und es gelte:*

*$\{o_1, \dots, o_m\} \subset H_1(a)$  und  $\{u_1, \dots, u_n\} \subset H_4(a)$ . Dann gilt:  
 $VD_L(\mathcal{A})$  ist nicht zusammenhängend.*

*Beweis.*

Aus  $m, n > 0$  folgt, dass es Bisektorstücke in  $L^+$  und  $L^-$  gibt, die zum Voronoi-Diagramm gehören. Da aber  $L \subset VR_L(a, \mathcal{A})$ , können diese Teile des Diagramms nicht verbunden sein.  $\square$

Nun stellt sich die Frage, ob wir Bedingungen finden, die den Zusammenhang des Voronoi-Diagramms sicherstellen. Da die beiden vorher genannten Beispiele die einzigen Ausnahmen sind, können wir feststellen:

**Satz 3.49.** *Sei  $\mathcal{A}$  eine endliche Menge von Punkten, von den nicht drei auf einer Geraden liegen und die nicht die Voraussetzung von Lemma 3.48 erfüllen. Dann ist das Voronoi-Diagramm  $VD_L(\mathcal{A})$  zusammenhängend.*

Für den Beweis benutzen wir das folgende Lemma:

**Lemma 3.50.** *Sei  $\{a, b, c\}$  drei Punkte, die nicht die Voraussetzungen von Lemma 3.47 und Lemma 3.48 erfüllen. Dann schneiden sich ihre Bisektoren.*

*Beweis.*

Wir unterscheiden nach der Lage von  $b$  zu  $a$ :

1.  $b \in H_2(a) \wedge a \notin H_1(b)$ . Nach Abschnitt 3.3.1 verläuft der Bisektor unbeschränkt auf  $L^+ \cap \mathcal{G}(a) \cap \mathcal{G}(b)$  und  $L^- \cap \mathcal{G}(a) \cap \mathcal{G}(b)$ . Er ist dort der euklidische Bisektor.
  - i.  $c \in H_1(a) \cup H_4(a)$ : Nach 3.3.3 schneidet der Bisektor  $\mathcal{G}(a)$  und verläuft unbeschränkt in  $\mathcal{F}_l(a)$  und  $\mathcal{F}_r(a)$ . Er muss also den Bisektor  $B_L(a, b)$  schneiden.
  - ii.  $c \in H_2(a)$ : In diesem Fall verläuft der Bisektor  $B_L(a, c)$  wie  $B_L(a, b)$  unbeschränkt in  $\mathcal{G}(a)$ . Daraus folgt, dass sich die Bisektoren kreuzen oder  $B(a, b)$  parallel zu  $B(a, c)$  verläuft.
  - iii.  $c \in H_3(a)$ : Nach Abschnitt 3.3.2 verläuft der Bisektor unbeschränkt auf  $L^+ \cap \mathcal{G}(a) \cap \mathcal{G}(b)$  und  $L^- \cap \mathcal{G}(a) \cap \mathcal{G}(b)$  oder unbeschränkt auf  $\mathcal{F}_l(a) \cap \mathcal{G}(b)$  und  $\mathcal{F}_r(a) \cap \mathcal{G}(b)$ . Damit müssen sich  $B_L(a, c)$  und  $B_L(a, b)$  kreuzen oder  $B(a, b)$  und  $B(a, c)$  parallel zueinander liegen.
2.  $b \in H_1(a) \vee a \in H_1(b)$ : Ohne Einschränkung sein  $b \in H_2(a)$ . Der Bisektor verläuft in  $L^+$  unbeschränkt zwischen den Grenzparabeln  $\Gamma(a)$  und  $\Gamma(b)$ . Der Fall  $c \in H_4(a)$  wird durch die Voraussetzung des Satzes ausgeschlossen.
  - i.  $c \in H_1(a)$ : Ist  $c \in H_1(b)$  oder  $b \in H_1(c)$ , so ist nach Satz 3.43 die Region von  $b$  oder  $c$  beschränkt und das Diagramm damit zusammenhängend. Die anderen Fälle sind unter (1) bereits behandelt.
  - ii.  $c \in H_2(a)$ : Ist  $a \in H_1(c)$ , so ist die Region von  $a$  beschränkt. Ansonsten verläuft der Bisektor  $B_L(a, c)$  unbeschränkt auf  $L^+ \cap \mathcal{G}(a) \cap \mathcal{G}(c)$  und  $L^- \cap \mathcal{G}(a) \cap \mathcal{G}(c)$  und schneidet damit  $B_L(a, b)$ .
  - iii.  $c \in H_3(a)$ : Der Bisektor verläuft auf  $L^+$  unbeschränkt in  $\mathcal{G}(a)$ . Damit schneidet er  $B_L(a, b)$ .

□

Kommen wir nun zum Beweis des Satzes 3.49.

*Beweis.*

Seien  $z_1$  und  $Z$  zwei Punkte des Voronoi-Diagramms. Wir laufen nun von  $z_1$  nach  $Z$ . Dabei durchqueren wir verschieden Voronoi-Regionen. Die Punkte, an denen wir das Diagramm kreuzen (oder betreten und verlassen), benennen wir fortlaufend mit  $z_i$ . Wir erhalten endlich viele Punkte  $z_1, \dots, z_n = Z$ . Hierbei liegen zwei benachbarte Punkte  $z_i$  und  $z_{i+1}$  auf dem Rand der gleichen Voronoi-Region von  $a_i \in \mathcal{A}$  (oder auf einer Kante). Es ist nun zu zeigen, dass die beiden Punkte  $z_i$  und  $z_{i+1}$  über den Rand der Region verbunden werden können.

Ist die Region  $VR_L(a_i, \mathcal{A})$  beschränkt, so sind wir fertig.

Seien  $b, c \in \mathcal{A}$  die beiden anderen Regionen, die zu  $a$  benachbart sind und auch auf deren Ränder  $z_i$  und  $z_{i+1}$  liegen. Liegen  $a_i, b, c$  nicht parallel zu einander und erfüllen nicht die Voraussetzung von Lemma 3.48, so schneiden sich ihre Bisektoren. Die Verbindung der Punkt  $z_i$  und  $z_{i+1}$  kann über die Bisektoren erfolgen, wenn diese zum Diagramm gehören. Ansonsten liegt zwischen den Bisektoren weitere Regionen, die dann aber die Region von  $a$  begrenzen.

Liegen die Punkte  $a_i, b, c$  auf einer Geraden, so gibt es nach der Voraussetzung mindesten einen anderen Punkt  $d \in \mathcal{A}$ , der nicht auf dieser Geraden liegt. Die Bisektor  $B(b, d)$  und  $B(c, d)$  schneiden sich und begrenzen damit einseitig die Region von  $a$ .

Es bleibt nur noch der Fall übrig, dass  $a_i, b, c$  die Voraussetzung von Lemma 3.48 erfüllen. Ohne Einschränkung sei daher nun  $b \in H_1(a_i)$  und  $c \in H_4(a_i)$ . Da nach Voraussetzung des Satzes nicht alle Punkte aus  $\mathcal{A}$  in  $H_1(a)$  und  $H_4(a)$  liegen dürfen, gibt es ein Punkt  $d \in H_2(a) \cup H_3(a)$ . Dieser begrenzt nun die Region von  $a$  einseitig, so dass  $z_i$  und  $z_{i+1}$  verbunden werden können.

Wir haben gezeigt, dass die benachbarten Punkte  $z_i$  und  $z_{i+1}$  über den Rand der Region von  $a_i$  verbunden werden können. Die gesamte Kette verbindet  $z_1$  mit  $Z$ . Da  $z_1$  und  $Z$  beliebig auf dem Diagramm liegen, ist das Diagramm zusammenhängend. □

Vergleichen wir nun das Diagramm mit dem euklidischen Voronoi-Diagramm von Liniensegmenten.

**Satz 3.51.** *Sei  $\mathcal{L}$  ein Laufbandmodell und  $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\}$  eine endliche Menge von Punkten. Wir definieren die folgenden Mengen:*

$$\begin{aligned} A_i^+ &:= a_i \cup s_l^-(a_i) \cup s_r^-(a_i), \\ A_i^- &:= a_i \cup s_l^+(a_i) \cup s_r^+(a_i), \\ S^+ &:= \bigcup_{i=1}^n A_i^+, \\ S^- &:= \bigcup_{i=1}^n A_i^-, \\ V^+ &:= VD_e(S^+), \\ V^- &:= VD_e(S^-). \end{aligned}$$

Dann gilt

$$VD_L(\mathcal{A}) = [L^+ \cap V^+] \cup [L^- \cap V^-]. \quad (3.25)$$

*Beweis.*

Nach Definition 3.45 und Satz 3.38 erhalten wir

$$\begin{aligned} VD_L(\mathcal{A}) &= \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{i=1}^n VR_L(a_i, \mathcal{A}) \\ &= \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{i=1}^n [[L^+ \cap VR_e(\mathcal{A}_i^+, S^+)] \cup [L^- \cap VR_e(\mathcal{A}_i^-, S^-)]] \\ &= L^+ \setminus \bigcup_{i=1}^n VR_e\{A_i^-, S^-\} \cup L^- \setminus \bigcup_{i=1}^n VR_e\{A_i^+, S^+\} \\ &= [L^- \cap VD_e(\setminus \bigcup_{i=1}^n A_i^-, S^-)] \cup [L^+ \cap VD_e(\setminus \bigcup_{i=1}^n A_i^+, S^+)] \\ &= [L^- \cap V^-] \cup [L^+ \cap V^+]. \end{aligned}$$

□

Betrachten wir das Voronoi-Diagramm als geometrischen Graphen, erhalten wir das folgende Lemma:

**Lemma 3.52.** *Sei  $\mathcal{A}$  eine endliche Menge von  $n$  Punkten ohne gemeinsame Stützlinien. Dann ist das Voronoi-Diagramm  $VD_L(\mathcal{A})$  ein geometrischer Graph mit  $O(n)$  Knoten und Kanten.*



*Beweis.*

Wie in den entsprechenden Sätzen zum klassischen Voronoi-Diagramm und dem Voronoi-Diagramm von Liniensegmenten kann man die Tatsache nutzen, dass die Bisektoren aus maximal acht Teilstücken bestehen. Durch Anwendung der eulerschen Formel erhält man die Schranke  $O(n)$ .  $\square$

**Bemerkung.** Wenn Punkte eine gemeinsame Stützlinie haben, so kann man Bisektorflächen erhalten. Schlägt man diese Flächen einer Region der beteiligten Punkte zu, so kann man das Voronoi-Diagramm als geometrischen Graphen darstellen. Die Schranke  $O(n)$  bleibt gültig.

Zum Abschluss des Abschnitts untersuchen wir die Zeitkomplexität der Berechnung des Voronoi-Diagramms. Wählt man die Bandgeschwindigkeit  $v = 1$ , so erhält man als Spezialfall das klassische Voronoi-Diagramm von Punkten, das zur Berechnung eine untere Schranke von  $\Omega(n \log n)$ -Zeit benötigt. Diese untere Schranke gilt somit auch für das Laufbandmodell. Der Satz 3.51 stellt bereits eine Möglichkeit dar, das Voronoi-Diagramm des Laufbandmodells zu berechnen, nämlich als Voronoi-Diagramm von Liniensegmenten. Die entsprechenden Stützlinien schneiden sich, wodurch der Zeitbedarf der Berechnung nicht durch  $O(n \log n)$  begrenzt werden kann. Man kann aber die Segmente weiter eingrenzen. In das Voronoi-Diagramm der oberen Halbebene  $L^+$  gehen nur Stützlinien ein, die in der unteren Halbebene liegen. Ist  $p \in L^+ \cap VR_e(s^-(a))$  ein Punkt in der Region einer Stützlinie  $s^-(a)$  und  $z$  der Fußpunkt von  $p$  auf  $(s^-(a))$ , so liegt ganz  $\overline{pz}$  in der  $VR_e(s^-(a))$ . Der Punkt  $z$  liegt somit auf der oberen Kontur der Stützlinien in  $L^-$ .

Für die Berechnung des Voronoi-Diagramms auf der oberen Halbebene wird nur die obere Kontur der Stützlinien der in der unteren Halbebene benötigt. Entsprechend wird für die Berechnung des Diagramms auf der unteren Halbebene nur die untere Kontur der Stützlinien der oberen Halbebene benötigt. Die Konturen der Stützlinien können in  $O(n \log n)$ -Zeit berechnet werden [8]. Tatsächlich vereinfacht sich die Berechnung der Konturen, da gleichnamige Stützlinien parallel zueinander liegen (vgl. Abbildung 3.23).

Man kann nun einen einfachen Algorithmus angeben, der das Voronoi-Diagramm im Laufbandmodell berechnet.

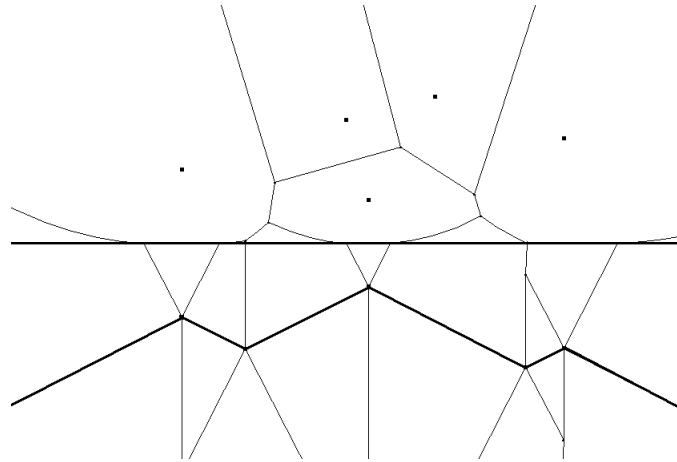


Abbildung 3.23: Voronoi-Diagramm der Halbebene  $L^+$  mit der oberen Kontur der Stützlinien in  $L^-$ .

### Algorithmus

Sei  $\mathcal{L}$  ein Laufbandmodell und  $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\}$  eine endliche Menge von Punkten.

1. Berechne obere Kontur  $k^-$  der Stützlinien  $\{s_\sigma^-(a) \mid a \in \mathcal{A}, \sigma \in \{l, r\}\}$  und die untere Kontur  $k^+$  der Stützlinien  $\{s_\sigma^+(a) \mid a \in \mathcal{A}, \sigma \in \{l, r\}\}$ .
2. Berechne die Voronoi-Diagramme von  $W^+ = VD_e(\mathcal{A} \cup k^-)$  und  $W^- = VD_e(\mathcal{A} \cup k^+)$ .
3. Bilde Diagramm  $VD_L(\mathcal{A}) = [L^+ \cap W^+] \cup [L^- \cap W^-]$ .<sup>5</sup>

## 3.6 Spezielle Voronoi-Diagramme

Wir wissen, dass man in einem Laufbandmodell ohne Einschränkung die  $X$ -Achse als Laufband setzen kann. Die Unterscheidung verschiedener Modelle erfolgt also über ihren Geschwindigkeitsparameter  $v \geq 1$ . Hierbei gibt es zwei Sonderfälle. Zum einen  $v = 1$ , wodurch man auf dem Laufband die

<sup>5</sup>Die Gleichheitszeichen sind nicht ganz korrekt, da noch die gemeinsamen Kanten zwischen Punkten und ihren Stützlinien entfernt werden müssen.

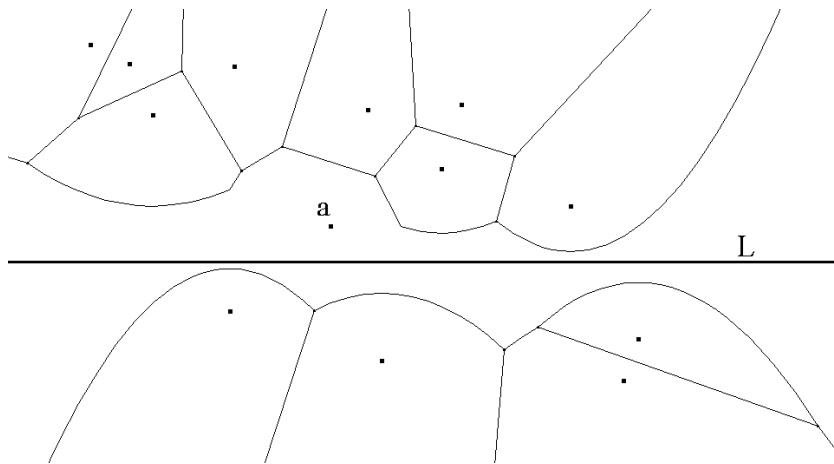


Abbildung 3.24: Laufband mit unendlicher Geschwindigkeit.  $L$  gehört ganz zur Voronoi-Region von  $a$ .

gleiche Zeit benötigt wie in der Ebene; zum anderen  $v = \infty$ , wodurch die Fortbewegung auf dem Band keine Zeit beansprucht.

1.  $v = 1$

Das Voronoi-Diagramm entspricht hier dem klassischen Voronoi-Diagramm. Für den Laufbandwinkel gilt  $\alpha_L = \pi/2$ . Da es hierdurch keine Eintrittspunkte gibt, entfällt für einen Punkt  $a$  die Unterteilung in  $\mathcal{G}(a)$  und  $\mathcal{F}(a)$ .

2.  $v = \infty$

Für den Laufbandwinkel ergibt sich  $\alpha_L = 0$ . Damit gibt es für einen Punkt  $a$  nur einen Eintrittspunkt auf dem Laufband, nämlich sein Lotpunkt auf  $L$ . Die Stützlinien laufen parallel zu  $L$ .  $L$  selbst liegt in der Region des Punktes mit dem geringsten Abstand zu  $L$ . Die Regionen der anderen Punkte liegen alle in ihrem Gehbereich. Wir fassen das zu einem kleinen Lemma zusammen.

**Lemma 3.53.** *Sei  $\mathcal{L}$  ein Laufbandmodell mit unendlicher Geschwindigkeit des Bandes  $L$ . Weiter sei  $\mathcal{A}$  eine endliche Menge und für  $a \in \mathcal{A}$  gelte  $d_e(a, L) < d_e(b, L)$  für alle  $b \in \mathcal{A} \setminus \{a\}$ .*

*Dann gilt  $L \subset VR_L(a, \mathcal{A})$  und  $\forall b \in \mathcal{A} \setminus \{a\} : VR_L(b, \mathcal{A}) \subset \mathcal{G}(b)$ .*

*Beweis.*

Der Beweis ergibt sich direkt aus dem Vergleich entsprechender Abstände. Siehe hierzu Abbildung 3.24.  $\square$

### 3.7 Zusammenfassung

In diesem Kapitel haben wir das Laufbandmodell untersucht, das durch eine spezielle Metrik auf  $\mathbb{R}^2$  charakterisiert wird. Die Metrik wird zusammengesetzt aus der euklidischen Metrik und einer Parametrisierung der euklidischen Metrik auf einer Geraden.

Die Bisektoren bestehen aus Liniensegmenten und Parabelstücken, können aber auch Flächen beinhalten.

Die Voronoi-Regionen sind zusammenhängend. Wir haben notwendige und hinreichende Kriterien für die Beschränktheit einer Region formuliert. Bereits zwei Punkte können die Region eines anderen Punktes beschränken.

Wir haben eine hinreichende Bedingung für den Zusammenhang des Voronoi-Diagramms angegeben. Es lässt sich als geometrischer Graph darstellen, der in optimaler  $O(n \log n)$ -Zeit berechnet werden kann.

Als Grundlage der Untersuchungen benutzten wir die Erkenntnisse über euklidischen Voronoi-Diagramme von Liniensegmenten. Das Voronoi-Diagramm im Laufbandmodell kann über die Stützlinien der Punkte aus einem Voronoi-Diagramm von Liniensegmenten abgeleitet werden.

# Kapitel 4

## Algorithmen für die Berechnung der Voronoi-Diagramme

In diesem Kapitel stelle ich die Algorithmen vor, die ich mit Java-Applikationen implementiert habe. Ziel ist die Erstellung einer Experimentierumgebung für das Voronoi-Diagramm von Liniensegmenten und vom Laufbandmodell.

Der Kern bildet die Berechnung des Voronoi-Diagramms von Liniensegmenten und Punkten in der Ebene. Der entsprechende Algorithmus wird daher eingehender besprochen. Die Implementation basiert auf einer Idee von Sugihara und Imai [7] für einen topologisch orientierten Algorithmus.

Für eine Menge von Liniensegmenten  $s_i = \overline{a_i b_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$  wird zuerst das Voronoi-Diagramm der Endpunkte  $\{a_1, b_1, \dots, a_n, b_n\}$  berechnet. Danach werden inkrementell die Segmente  $s_i$  in das Diagramm eingefügt (vgl. Abbildung 4.1). Es wird zuerst festgestellt, welcher Teil des Graphen gelöscht wird. Dieser Teil bildet einen zusammenhängenden Teilgraphen, dessen Knoten und Kanten dann schrittweise ersetzt werden.

Diese Idee hat bereits Martin Held mit seinem Programm Vroni [4] umgesetzt.

Ein Nachteil dieses Vorgehens ist, dass zu Beginn das Voronoi-Diagramm aller Endpunkte berechnet wird. Dadurch müssen alle Liniensegmente, von denen das Diagramm berechnet wird, vor dem Start des Algorithmus fest-

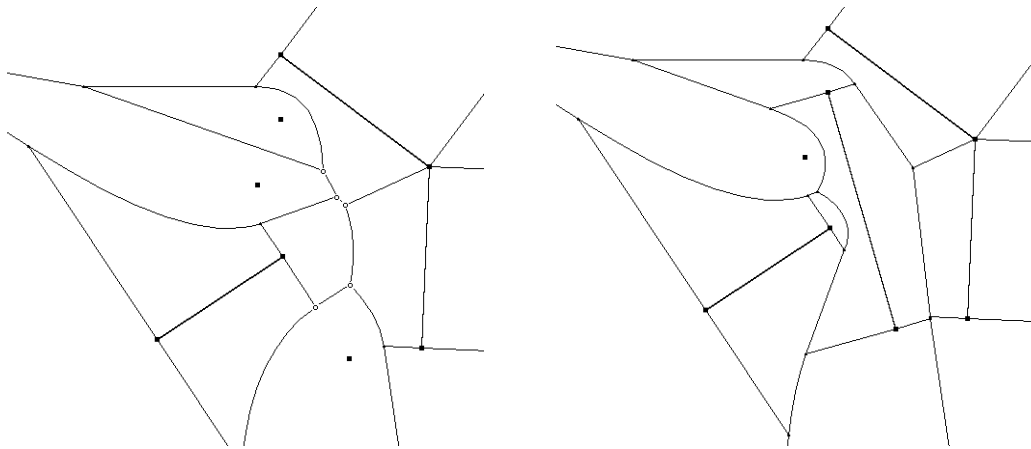


Abbildung 4.1: Einfügen eines Segments.

stehen. Im Gegensatz dazu können mit dem hier vorgestellten inkrementellen Algorithmus Punkte in ein bestehendes Diagramm von Liniensegmenten eingefügt werden. Hierdurch kann der Benutzer in Abhängigkeit von bisherigen Ergebnissen Liniensegmente beliebig eingeben. Auch das Verschieben von Liniensegmenten ist ohne Neuaufbau des gesamten Diagramms möglich.

Ich beginne mit der Betrachtung der Laufzeit der Algorithmen. Danach betrachten wir nur noch meine Implementation, die das Voronoi-Diagramm von offenen Liniensegmenten berechnet. Ich erkläre dieses speziellen Voronoi-Diagramm und erläutere anschließend den Algorithmus im Einzelnen. Abschließend zeige ich die Bedienung der entsprechenden Benutzeroberflächen für die Programme *VoroLS* und *VoroBand*.

## 4.1 Laufzeit

Mit seinem in C entwickelten Programm erzielte Martin Held robuste und genaue Ergebnisse in einer beachtlich kurzen Zeit bezogen auf Vergleiche mit anderen Algorithmen [5]. Er verglich sein Programm mit Imai's Fortran Programm *plvor*, mit Sell's C++ Programm *avd* und mit Sethia's C++ Programm *pvd*. In seinen Untersuchungen gibt Martin Held eine experimentelle Laufzeit von  $O(n \log n)$  an.

Dennoch, man kann für alle iterativen Algorithmen, die zuerst das Diagramm der Endpunkte erstellen und dann die Segmente einfügen, Aufgaben konstruieren, für deren Lösung eine Laufzeit von  $O(n^2)$  benötigt wird. Hierzu ein Beispiel (vgl. Abbildungen 4.2).

Seien  $s_i = \overline{a_i b_i}$   $n$  Liniensegmente mit  $a_i = (-i, \frac{i-1}{i})$  und  $b_i = (i, \frac{i-1}{i})$ .

Nachdem das Voronoi-Diagramm der Endpunkte erstellt wurde, werden nun die offenen Segmente in umgekehrter Reihenfolge eingefügt, also mit Segment  $s_n$  beginnend bis Segment  $s_1$ . Für das Einfügen des Segments  $s_{n-\mu}$  müssen die Regionen der Punkte  $a_1, \dots, a_{n-\mu}$  und  $b_1, \dots, b_{n-\mu}$  verändert werden, also  $2(n - \mu)$  Änderungen. Das Einfügen aller  $n$  Segmenten benötigt somit mindestens

$$\sum_{\mu=0}^{n-1} 2(n - \mu) = n(n + 1)$$

Operationen. Folglich braucht das Einfügen dieser  $n$  Segmente  $O(n^2)$  Zeit. Dass in experimentellen Testläufen sehr schnelle Ergebnisse geliefert werden, liegt an der topologischen Struktur der meisten Aufgaben mit einer hohen Anzahl an Liniensegmenten. Hat man das Voronoi-Diagramm der Endpunkte bereits berechnet, so fällt die Auswirkung des lokalen Einfügens eines Segments auf die globale Struktur des Diagramms sehr gering aus.

Beispiel für eine quadratische Laufzeit:

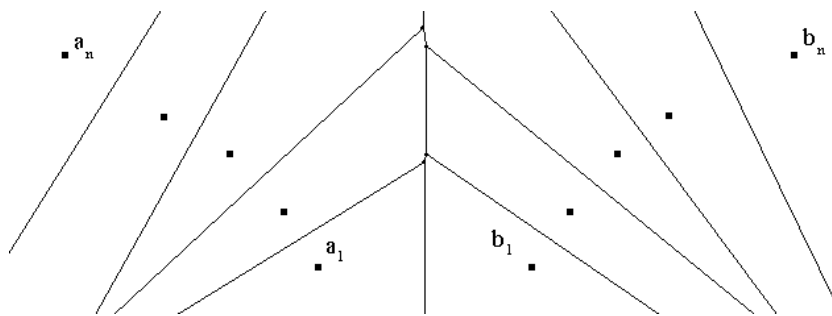
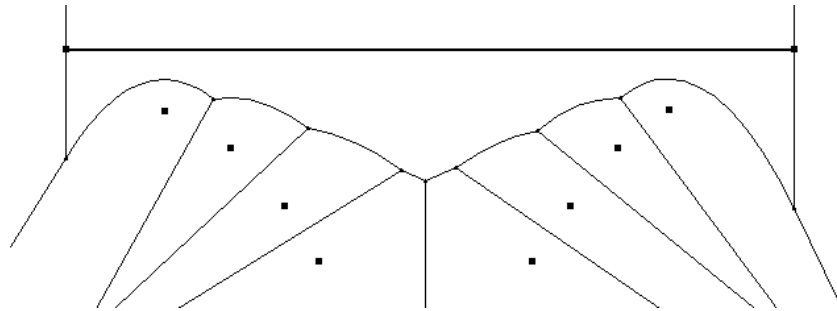
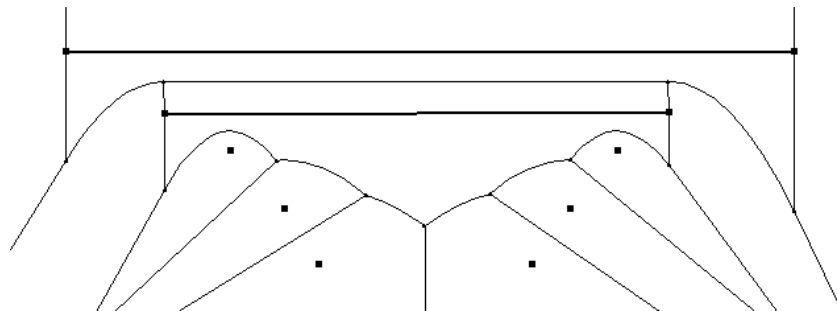


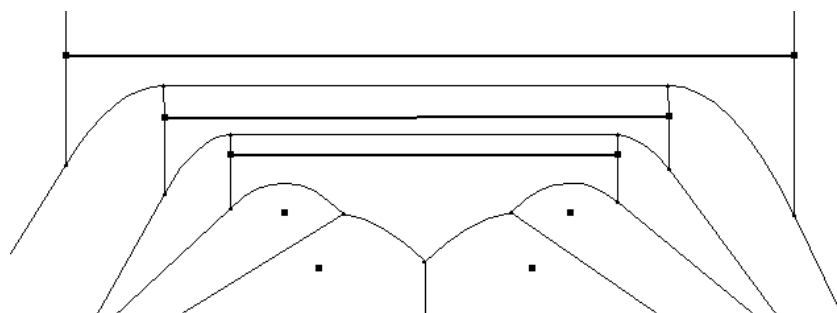
Abbildung 4.2: Voronoi-Diagramm der Endpunkte



Das Einfügen eines Segments ändert alle Regionen.



Die Regionen der Punkte werden geändert.





## 4.2 Das Voronoi-Diagramm mit offenen Liniensegmenten

In diesem speziellen Voronoi-Diagramm wird ein Liniensegment  $l = \overline{ab}$  aufgeteilt in seine Endpunkte  $a$ ,  $b$  und seinem offenen Teil  $\overset{\circ}{l}$ . Die Endpunkte erhalten eigene Voronoi-Regionen. Berechnet man zum Beispiel das Voronoi-Diagramm eines einzelnen Liniensegments, so erhält man die Streifenzerlegung  $\mathbb{R}^2 = H_a \cup S_l \cup H_b$  (vgl. Definition 1.7).

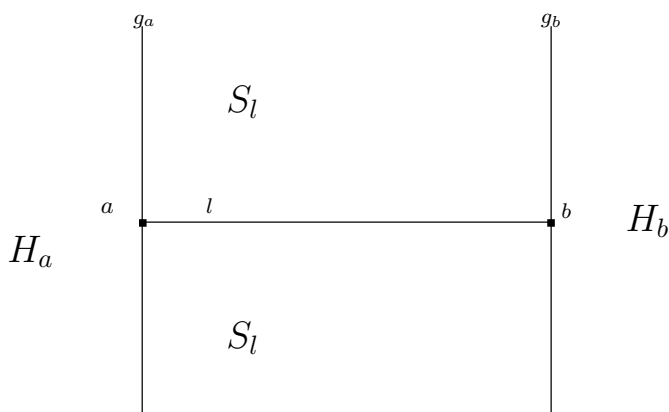


Abbildung 4.3: Voronoi-Diagramm eines einzelnen Segments

Damit gilt für die entsprechenden Voronoi-Regionen  $VR(a, \{l\}) = \overset{\circ}{H}_a$  und  $VR(\overset{\circ}{l}, \{l\}) = \overset{\circ}{S}_l$ . Das Voronoi-Diagramm wird durch die Grenzgeraden gebildet, also  $VD(\{l\}) = g_a \cup g_b$ . Natürlich gilt für einen Punkt  $p \in H_a$  die Gleichung  $d_e(a, p) = \inf\{d_e(p, q) \mid q \in \overset{\circ}{l}\} = d_e(p, \overset{\circ}{l})$  und liegt nach Definition auf dem Bisektor von  $a$  und  $\overset{\circ}{l}$ , aber die aufgeführte Unterteilung hat folgenden Vorteil: Das resultierende Voronoi-Diagramm bleibt ein geometrischer Graph, da durch die Voronoi-Regionen der Endpunkte die Bisektorflächen aufgelöst werden, was für die Berechnung sehr hilfreich ist. Aus dem berechneten Diagramm kann man einfach die entsprechenden Voronoi-Regionen erkennen. Ist ein Liniensegment isoliert zu den anderen, so fügt man die Regionen der Endpunkte und des Inneren zusammen; für einen Polygonzug bilden die Regionen der gemeinsamen Endpunkte gerade die Bisektorflächen.

### 4.3 Grundlagen

Aufgabe ist die Bereitstellung einer Experimentierumgebung für das Voronoi-Diagramm von Liniensegmenten und dem Laufbandmodell. Bezogen auf das Diagramm von Liniensegmenten bedeutet das:

- Der Benutzer gibt sequentiell Punkte und Liniensegmente über eine graphische Benutzeroberfläche ein,
- Nach jeder Eingabe soll die Änderung des Voronoi-Diagramms dargestellt werden.

Damit ist die asymptotische Zeitkomplexität einiger Algorithmen, auf Grund der relativ geringen Anzahl von Objekten, nicht so entscheidend wie die praktische Laufzeit.

Es seien  $P_n$  Mengen von Punkten;  $Q_n$  Mengen von Liniensegmenten in  $\mathbb{R}^2$  mit Endpunkten aus  $P_n$ .  $P_0$  und  $Q_0$  sind zu Beginn initialisiert. Mit der Eingabe eines Punktes oder Liniensegments ändert der Benutzer die Mengen wie folgt:

- Eingabe eines Punktes  $p$ :  $P_n = P_{n-1} \cup \{p\}$  und  $Q_n = Q_{n-1}$ ,
- Eingabe eines Segments  $\overline{ab}$ :  $P_n = P_{n-1} \cup \{a, b\}$  und  $Q_n = Q_{n-1} \cup \{\overline{ab}\}$ .

Sei  $S_n = P_n \cup Q_n$ . Ziel ist die Berechnung des Voronoi-Diagramms  $VD(S_n)$  aus dem bestehenden Diagramm  $VD(S_{n-1})$ . Des weiteren verzichte ich auf die Indizierung der Mengen.

Das Diagramm wird als ein geometrischer Graph  $VD(S) = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  dargestellt, der als verkettete Liste durch die Algorithmen bearbeitet werden kann. Die Objekte der Menge  $S$  nennen wir Sites; die Elemente von  $\mathcal{V}$  nennen wir Knoten und die Elemente von  $\mathcal{E}$  nennen wir Kanten.

Für den Graphen  $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$  und die dadurch begrenzten Voronoi-Regionen sind hierbei die folgenden topologischen Eigenschaften wichtig und im Verlauf des Programms zu sichern:

- Jeder Knoten  $v \in \mathcal{V}$  hat 2 oder 3 Kanten aus  $\mathcal{E}$ .
- Jede Kante  $e \in \mathcal{E}$  ist beschränkt bzw. hat zwei Endpunkte aus  $\mathcal{V}$ .
- $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$  ist zusammenhängend.
- Alle Voronoi-Regionen sind beschränkt.
- Jeder Site muss in der konvexen Hülle seiner Randknoten aus  $\mathcal{V}$  liegen.
- An den Endpunkten der Segmente liegen auch Knoten vom Grad 2. Die von ihnen ausgehenden Kanten verlaufen entlang der Streifengrenzen der Segmente.

Damit die Aussagen überhaupt möglich sind, wird vor der Eingabe der Punkte ein Voronoi-Diagramm durch vier Punkte initialisiert, die hinreichend außerhalb des Eingabebereichs liegen. Diese Punkte sichern, dass die Regionen der Sites beschränkt sind und dass das Voronoi-Diagramm zusammenhängend ist.

Der Bisektor zwischen einem Punkt und einem Liniensegment kann auch ein Parabelstück sein. Die Parabeln werden im Voronoi-Diagramm aufgeteilt, indem der Scheitelpunkt der Parabel als zusätzlicher Knoten mit Grad 2 gesetzt wird. Auf die Regionen hat das keinen Einfluss. Das Setzen dieser Scheitelknoten erspart meist das Berechnen und Setzen von Hilfsknoten, die zur Sicherung der topologischen Struktur notwendig sind.

## 4.4 Die Datenstruktur

Es wird ein geometrischer Graph berechnet. Da Java eine objektorientierte Programmiersprache ist, bietet sich hierfür eine verkettete Liste an. In der Literatur wird diese als DCEL (double connected edge list) bezeichnet. Abweichend werden jedoch nicht nur Kantenobjekte miteinander verbunden, sondern Knoten mit Kanten. Jeder Knoten hat eine Referenz auf die Kanten, die von ihm ausgehen; jede Kante hat zwei Referenzen auf die Knoten, zwischen denen sie verläuft.

### **Knoten**

Die Knoten sind die Punkte, die zu mindestens drei Sites den geringsten Abstand haben. Die entsprechenden Sites und die Distanz zu diesen werden gespeichert. Die Position auf der Ebene wird als Punkt gespeichert. Von jedem Knoten gehen zwei oder drei Kanten aus. Die Anordnung der Kanten am Knoten erfolgt im Uhrzeigersinn. Entsprechend dieser Anordnung sind für jede Kante an einem Knoten die Vorgänger- und Nachfolgerkante definiert. Durch diese Struktur kann der Graph kontrolliert durchlaufen werden.

Neben den Referenzen auf die Kanten und Sites erhält jeder Knoten noch zwei Flags, die von den später vorgestellten Algorithmen gesetzt werden.

### **Kanten**

Die Kanten verlaufen zwischen zwei Knoten und trennen zwei Regionen, d.h. die Punkte einer Kante haben zu genau zwei Sites den geringsten Abstand. Jede Kante erhält Referenzen auf die Knoten, zwischen den sie liegt und auf die beiden Sites, durch die ihr Verlauf bestimmt wird. Da das Voronoi-Diagramm von Liniensegmenten berechnet wird, können die Kanten Liniensegmente oder Parabelstücke sein. Das entsprechende Kurvenobjekt wird als Position gespeichert.

### **Sites**

Von der Menge der Sites wird das Voronoi-Diagramm berechnet. Es sind einzelne Punkte oder Liniensegmente. Da das Diagramm von offenen Liniensegmenten berechnet wird, sind die Endpunkte von Liniensegmenten eigenständige Sites. Ein Liniensegment erhält Referenzen auf seine Endpunkte. Ein Punkt kann Endpunkt mehrerer Segmente sein. Für die Liniensegmente ist jedoch von Bedeutung, dass sie sich **nicht** schneiden. Das Programm unterscheidet daher zwischen den Eingabeobjekten (Elementen) und den Sites. Kreuzen sich zwei Segmente, so entsteht aus diesen zwei eine Kreuzung mit vier Segmenten. Jeder Site erhält deshalb einen Zeiger auf das Element, das ihn erzeugt. Um den Rand einer Region zu durchlaufen, erhält jeder Site eine Referenz auf eine Kante und einen Knoten seiner Region.

### **Elemente**

Die Elemente sind die Eingabeobjekte. Sie erzeugen die Sites, von denen das Diagramm berechnet wird.

### **Das Voronoi-Diagramm von Liniensegmenten**

Dieses Objekt beinhaltet die Prozeduren, die für die Berechnung notwendig sind. Die entsprechenden Objekte (Elemente, Sites, Knoten und Kanten) werden in Listen verwaltet.

Die Abbildung 4.4 zeigt die Verkettung der Objekte.

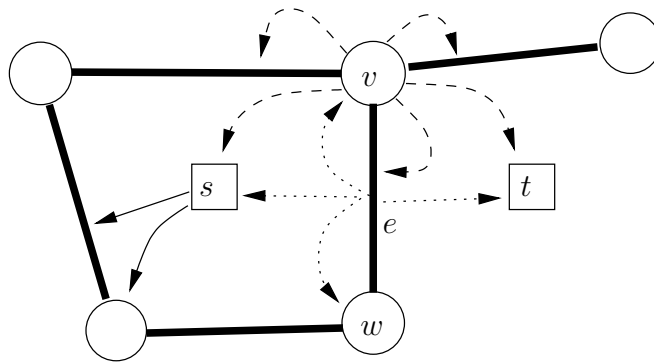


Abbildung 4.4: Verketzung der Objekte.  $s, t$  sind Sites,  $v, w$  sind Knoten und  $e$  ist eine Kante.

Knoten:

Position : Punkt,  
 Kanten[3] : Zeiger auf Kanten im Uhrzeigersinn orientiert,  
 Site[3] : Sites des Knotens,  
 Distanz : Abstand zu den Sites,  
 Besucht : Flag, wenn Knoten im Suchdurchlauf untersucht wurde,  
 Loeschen : Flag, wenn Knoten aus dem Diagramm entfernt werden soll,

$nachfolgerkante(e)$  : Rückgabe der Kante des Knotens, die auf  $e$  im Uhrzeigersinn folgt.

Kanten:

Position : Liniensegment oder Parabelstück,  
 Knoten[2] : Zeiger auf Knoten,  
 Site[2] : Zeiger auf Sites.

Site:

EndSite[2] : Endpunkte bei Liniensegmenten,  
 Position : Punkt oder Liniensegment,  
 Knoten : Zeiger auf einen Knoten der Region,  
 Kante : Zeiger auf eine Kante der Region.

## 4.5 Die Prozeduren

Ausgehend von der in 4.4 aufgeführten Datenstruktur, werden hier die einzelnen Prozeduren behandelt, die für das Berechnen des Diagramms notwendig sind. Es wird jedoch nur der algorithmische Ablauf dargestellt. Die entsprechende Implementation erhält man in den entsprechenden Programmdateien. Sei  $VD$  das Objekt, das die entsprechenden Daten des Voronoi-Diagramms beinhaltet. Das Programm muss folgende wesentliche Methoden beinhalten:<sup>1</sup>

- |                                      |  |
|--------------------------------------|--|
| A. Programm start:                   | $VD.Initalisieren();$  |
| B. Punkt $p$ einfügen:               | $VD.PunktEinfuegen(p);$  |
| C. Segment $\overline{ab}$ einfügen: | $VD.PunktEinfuegen(a)$<br>$VD.PunktEinfuegen(b);$<br>$VD.SegmentEinfuegen(a,b);$ |

Das Einfügen der Punkte und das Einfügen der Segmente wird nun im einzelnen dargestellt. Zur Übersicht sind Variablen wie folgt benannt: Die Knoten mit  $v, w$ , die Kanten mit  $e, f$  und die Sites mit  $s, r$ . An die Buchstaben kann zur Differenzierung noch ein Suffix angehängt sein.

### 4.5.1 Punkt einfügen

Der Punkt  $p$  wird eingefügt. Da wir ein bestehendes Diagramm ändern, sind natürlich die Knoten und Kanten von Interesse, die durch das Einfügen gelöscht werden. Wir bezeichnen diese Knoten mit  $V_p$  und die Kanten entsprechend mit  $E_p$ .

Der Ablauf ist nun der folgende:

1. Bestimme den nächsten Nachbarn  $s$  von  $p$  in  $S$ .
2. Markiere rekursive alle Elemente von  $\mathcal{V}$  und  $\mathcal{E}$ , die gelöscht werden, d.h erstelle  $(V_p, E_p)$ .
3. Lösche rekursiv die Elemente von  $(V_p, E_p)$  aus  $\mathcal{V}$  und  $\mathcal{E}$  und füge neue Elemente hinzu.

---

<sup>1</sup>Das Löschen eines Objektes geschieht durch vollständigen Neuaufbau.

Es folgt nun die Erläuterung zu den einzelnen Teilen.

- zu 1: Der nächste Nachbar  $s$  von  $p$  wird ermittelt, indem die Entfernung von  $p$  mit allen Elementen aus  $S$  verglichen wird. Dieses Vorgehen benötigt bei wiederholtem Einfügen aller Punkte bereits quadratische Laufzeit. Hierbei ist jedoch zu bedenken, dass zum einen die Punkte sequenziell durch den Benutzer eingegeben werden und zum anderen die Anzahl an Punkten relativ gering ist. Die Wahl fiel deshalb auf dieses einfache Verfahren.
- zu 2: Durch den ersten Teil wissen wir, dass  $p$  in oder auf dem Rand der Voronoi-Region  $VR(s, S)$  liegt. Es gibt nun eine wichtige Eigenschaft des Diagramms.

**Lemma 4.1.**  $(V_p, E_p)$  ist ein zusammenhängender Teilgraph von  $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ .

*Beweis.*

$p$  verletzt mindestens eine Kante  $e$  zwischen  $s$  und einem anderen Site  $r$ . Nehmen wir an,  $p$  verletzt eine weitere Kante  $f$  vom Rand der Region von  $r$  oder  $s$ . Damit teilt  $p$  diese Region in zwei Teile. Der eine Teil gehört weiter zu  $r$  bzw.  $s$ , der andere Teil liegt näher an  $p$ . Nach den topologischen Voraussetzungen sind die Regionen von  $s$  und  $r$  beschränkt. Damit muss der Rand der Region, der durch  $p$  abgetrennt wird, geändert werden.  $e$  und  $f$  sind verbunden in  $(V_p, E_p)$ .  $\square$

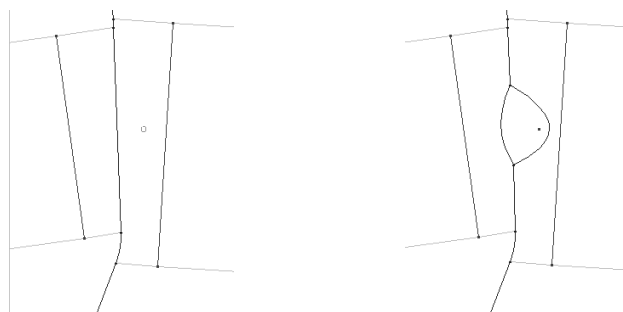


Abbildung 4.5: Einfügen des Punktes verletzt keinen Knoten.

Wie Abbildung 4.5 zeigt, können wir nicht davon ausgehen, dass Knoten gelöscht werden. Ist  $V_p = \emptyset$ , so besteht  $E_p$  nur aus einem Element, das auf dem Rand von  $VR(s)$  liegt.

Ist  $V_p \neq \emptyset$ , so befindet sich ein Knoten  $v$  in  $V_p$ , der auf dem Rand der Region von  $s$  liegt. Dieser wird als Startknoten gewählt, von dem weiter alle Elemente von  $V_p$  rekursiv markiert werden. Hierbei muss darauf geachtet werden, dass die Rekursion nicht in einer Endlosschleife mündet.

zu 3: Wurde nur eine Kante markiert, so wird diese aufgetrennt und die entsprechende Region um  $p$  eingefügt. Ansonsten wird wieder bei  $v$  beginnend, die Menge  $V_p$  rekursiv durchlaufen. Für jede Kante zwischen einem Knoten aus  $V_p$  und einem Knoten aus  $\mathcal{V} \setminus V_p$  wird ein neuer Knoten berechnet und die entsprechenden neuen Kanten gesetzt.

Das Beispiel am Ende mit den Abbildungen 4.6 und 4.7 veranschaulicht den Ablauf.

Die Methode *PunktEinfuegen(p)* ergibt sich nun wie folgt:

```

VD.PunktEinfuegen(p){
    s = NaechsterSite(p);
    v = KonfliktKnoten(s,p);
    Existiert kein v, dann
        e = KonfliktKante(q,p);
        NeueRegion(e,p);
        return;
    Existiert ein v, dann
        MarkiereKnoten(v,p);
        AendereGraph(v,p);
        return;
};

```

Der interessante Teil findet sich in den Methoden *MarkiereKnoten(..)* und *AendereGraph(..)*. Hier wird das Diagramm rekursiv durchlaufen. Jedem Knoten sind die Flags *Besucht* und *Loeschen* zugeordnet. Diese werden in der Markierungsphase gesetzt. Um das Setzen von *Loeschen* zu entscheiden,



wird der Abstand des Knotens zum neuen Punkt  $p$  mit der Distanz zu seinen bestimmenden Sites verglichen. Wir besprechen nun diese beiden Prozeduren im einzelnen.

### MarkiereKnoten

Wir beginnen mit dem Startknoten  $v$ .  $v$  hat bis zu drei Kanten, die rekursiv durchlaufen werden. Sind es nur zwei Kanten, so wird der dritte Aufruf nicht durchgeführt.

```

VD.MarkiereKnoten( $v,p$ ){
    % IN: neuer Punkt  $p$ ,
    %     Startknoten  $v$ .
    Setze  $v.Besucht$  und  $v.Loeshen$ ;
     $e = v.Kante$ ;
    MarkiereRekursiv( $e,v,p$ );
     $e = v.nachfolgerkante(e)$ ;
    MarkiereRekursiv( $e,v,p$ );
     $e = v.nachfolgerkante(e)$ ; % Wenn  $grad(v) = 3$ 
    MarkiereRekursiv( $e,v,p$ );
};

```

Nun zur eigentlichen Rekursion. Die Methode erhält als Parameter einen Knoten und eine Kante. Um Endlosschleifen zu vermeiden, endet die Rekursion, wenn dieser Knoten bereits bearbeitet wurde. Ansonsten wird der Knoten als *Besucht* markiert.

Ist der Abstand des Knoten zu  $p$  größer als zu den seinen Sites, so endet die Rekursion. Ansonsten wird er entsprechend markiert, um später gelöscht zu werden. In diesem Fall erfolgen auch die weiteren Rekursionsaufrufe.

```

VD.MarkiereRekursiv( $e,w,p$ ){
    % IN: Herkunft Kante  $e$ ,
    %     Knoten  $w$  wird untersucht,
    %      $p$  wird in das Diagramm eingefügt,
    If  $w.Besucht$  then return;
    Setze  $w.Besucht$ ;

```

```

    if  $w.Distanz \leq d_e(w, p)$ 
        then return;           %  $w$  bleibt bestehen
    Setze  $w.Loeshen$ ;
     $f = w.nachfolgerkante(e)$ ;
     $MarkiereRekursiv(f, w, p)$ ;
     $f = w.nachfolgerkante(f)$ ; % Wenn  $grad(w) = 3$ 
     $MarkiereRekursiv(f, w, p)$ ;
};

```

### **AendereGraph**

Die Änderung erfolgt wieder von  $v$  aus rekursiv über alle Knoten, die gelöscht werden.  $v$  kann mit drei Nachbarknoten verbunden sein. Jeder dieser Äste wird durch die Methode *AendereRekursiv*, die später besprochen wird, rekursiv durchlaufen. Als Antwort werden bis zu sechs neue Knoten ( $w^*$ ) zurückgegeben. Die neuen Knoten müssen nun noch mit entsprechend neuen Kanten verbunden werden.

#### **VD.AendereGraph(v,p){**

```

    % 1. Bestimme die Kanten  $e1, e2, e3$  von  $v$ .
     $e1 = v.eineKante()$ ;
     $e2 = v.nachfolgerKante(e1)$ ;
     $e3 = v.nachfolgerKante(e2)$ ;

    % 2. Rekursive Änderung des Graphen über die Kanten .
     $[w1l, w1r] = AendereRekursiv(v, e1, p)$ ;
     $[w2l, w2r] = AendereRekursiv(v, e2, p)$ ;
     $[w3l, w3r] = AendereRekursiv(v, e3, p)$ ;

    % 3. Neue Kanten
     $KanteEinfuegen(w1r, w2l)$ ;
     $KanteEinfuegen(w2r, w3l)$ ;
     $KanteEinfuegen(w3r, w1l)$ ;

    % 4. Lösche  $v$  und setze neue Region  $p$ 
     $loeschen(v)$ ;
     $NeuerSite(p)$ ;
};

```

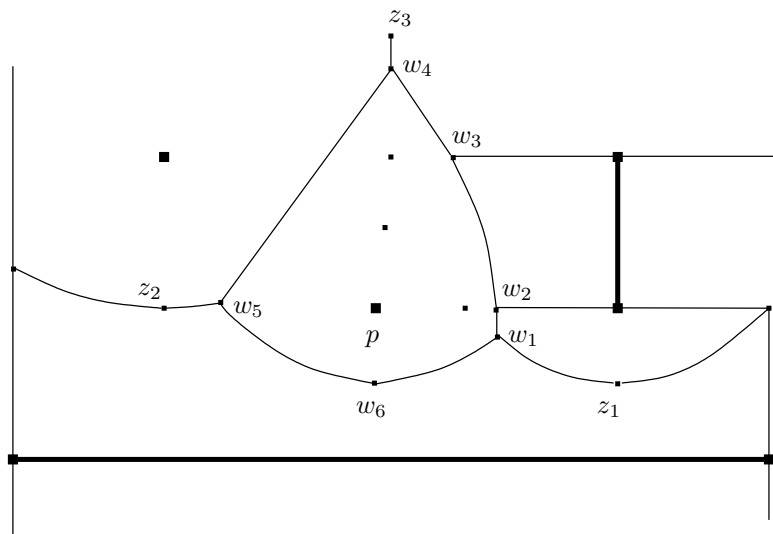
Es bleibt jetzt noch der rekursive Durchlauf der Äste von  $v$  mittels der Methode *AendereRekursiv*. Die Rekursion wird von einem zu löschenden Knoten  $w$  in Richtung einer Kante  $e$  bearbeitet. Die Prozedur untersucht den Folgeknoten  $u0$ .

Wird  $u0$  nicht gelöscht, so wird ein neuer Knoten  $u1$  berechnet. Die Kante  $e$  zwischen  $u0$  und  $w$  wird durch eine Kante zwischen  $u0$  und  $u1$  ersetzt. Die Rekursion endet und die Methode gibt das Paar  $[u1, u1]$  zurück.

Wird  $u0$  ebenfalls gelöscht, so wird die Rekursion mit Knoten  $u0$  weitergeführt. Die Rekursion gibt dabei für jede Kante, über die sie läuft, ein Knotenpaar zurück. Die Knotenpaare werden mit einer Kante verbunden. Die beiden Randknoten werden zurückgegeben.

```
AendereRekursiv(e, w, p){
    %    IN:    Herkunft Kante e
    %           Herkunft Knoten w
    %           Neuer Punkt p;
    %    OUT: Knotenpaar [wl, wr];
    u0 = e.GegenKnoten(w);
    If u0.Loeschen then {                               % a wird gelöscht
    % 1. Bestimme die folgenden Äste
        f1 = u0.nachfolgerkante(e);
        f2 = u0.nachfolgerkante(f1);
    % 2. Aufruf der Rekursion
        [u1l, u1r] = AendereRekursiv(f1, u0, p);
        [u2l, u2r] = AendereRekursiv(f2, u0, p);
    % 3. Änderung des Diagramms
        KanteEinfuegen(u1r, u2l );
        loesche(u0);
        return [u1l, u2r];
    }
    else {      % u0 bleibt bestehen
        Setze u0.Besucht zurück;
    % Setze eines neuen Knotens auf e
        u1 = NeuerKnoten auf e;
        Kürze Kante e;
        return [u1, u1];
    };
}
```



Abbildung 4.7: Voronoi-Regionen nach Einfügen von  $p$ 

### 4.5.2 Segment einfügen

Das Einfügen eines Segments  $l$  erfolgt nach dem gleichen Prinzip wie das Einfügen eines Punktes. Es werden die zu löschenden Knoten markiert und anschließend der Graph neu aufgebaut. In der Implementation wurden die Methoden *AendereGraph* und *AendereRekursiv* unverändert benutzt. Der Hauptunterschied zum Einfügen eines Punktes sind die möglichen Sonderfälle. Das Einfügen eines Segments führt immer zu einem Knoten, der gelöscht wird, nämlich auf dem Rand der Endpunkte.

Folgende Probleme können jedoch beim Einfügen eines Segments auftreten:

- Alle Knoten einer Region werden gelöscht,
- Segmente schneiden sich.

Die beiden Problemfälle werden während der Markierungsphase erkannt und behoben. Der Schnitt von Sites führt dazu, dass das Segment gekürzt wird. Die entsprechenden Teilsegmente verursachen die while-Schleifen.

```

VD.SegmentEinfuegen(l){
  while  $l \neq \emptyset$ 
    Setze  $k = l$ ;
     $s = \text{NaechsterSite}(k)$ ;
     $v = \text{KonfliktKnoten}(s,k)$ ;
     $\text{MarkiereKnoten}(v,k)$ ;
     $\text{AendereGraph}(v,k)$ ;
    Setze  $l = l \setminus k$ .
  }Ende while
  return;
};

```

Wir betrachten hier nur noch die Methode  $\text{MarkiereKnoten}(s, k)$  bzw. den Rekursionsteil. In dieser Markierungsphase können die beiden oben erwähnten Probleme auftauchen. Die Rekursion endet unter anderem, wenn ein Knoten erreicht wird, der bereits besucht wurde. Wird dieser Knoten gelöscht, so besteht die Gefahr, dass alle Knoten einer Region gelöscht werden. Ist dies der Fall, muss die betreffende Region vorher gesichert werden. Der andere Problemfall ist das Schneiden von Segmenten. An jedem Knoten mit Grad 3 wird die Region eines neuen Sites erreicht. Dieser Site wird auf den Schnitt mit dem einzufügenden Segment geprüft.

```

VD.MarkiereRekursiv( $e, w, l$ ){
  % IN: Herkunft Kante  $e$ ,
  %   Knoten  $w$  wird untersucht,
  %    $l$  wird in das Diagramm eingefügt,
  If  $w.Besucht$  then
    Prüfe Sites von  $w$ , ggf. sichere Regionen
    return;
  Setze  $w.Besucht$ ;
  Prüfe Sites von  $w$  auf Schnitt mit  $l$ .
  Existiert Schnittpunkt  $z$  von  $l$  mit einem Site  $s$ :
     $\text{TeileRegion}(s)$  in  $z$ ;
    Kürze  $l$  bis  $z$ .
}

```

```

if  $w.Distanz \leq d_e(w, p)$ 
    then return;           % w bleibt bestehen
Setze  $w.Loeshen$ ;
 $f = w.nachfolgerkante(e)$ ;
 $MarkiereRekursiv(f, w, l)$ ;
 $f = w.nachfolgerkante(f)$ ; % Wenn  $grad(w) = 3$ 
 $MarkiereRekursiv(f, w, l)$ ;
};

```

**Das Sichern einer Region:** Die Sicherung einer Region ist nur für Punkte notwendig, da der Rand eines Segments über dessen Endpunkte verläuft. An diesen Endpunkten befinden sich Knoten, die nicht gelöscht werden.

Das Sichern einer Region erfolgt, indem ein Hilfsknoten vom Grad 2 gesetzt wird, der nicht verschwindet (siehe Abbildung 4.8). Von dem betreffenden Site bildet man die Senkrechte auf das einzufügende Segment. Diese Senkrechte schneidet den Rand der Region in zwei Punkten, von denen einer näher am Punkt als am Segment liegt. Dieser Schnittpunkt wird als neuer Knoten gesetzt und die Region damit gesichert.

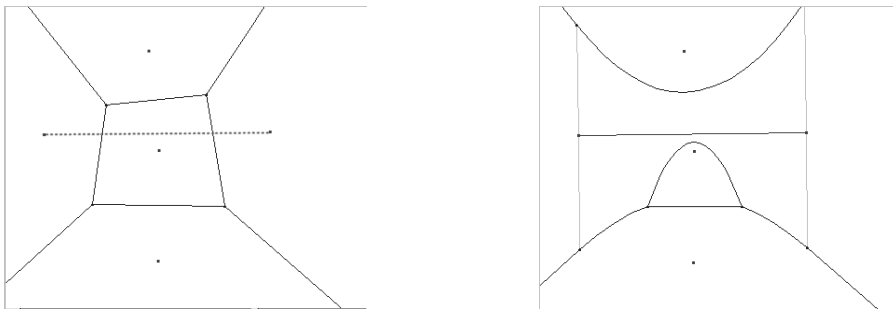


Abbildung 4.8: Alle Knoten des mittleren Punktes werden gelöscht.

**Sich schneidende Liniensegmente:** Hierbei geht man wie folgt vor. Man ermittelt den Schnittpunkt mit dem betreffenden Site. Dieser wird am Schnittpunkt geteilt. Beide Teile erhalten ihre eigene Region. Die Grenzkante der beiden Regionen ist die Senkrechte im Schnittpunkt. Das Segment, das neu eingefügt wird, wird ebenfalls am Schnittpunkt geteilt. Die beiden Teile wer-

den hinter einander in das Diagramm eingefügt. Hierbei können die markierten Knoten für das Segment weiter benutzt werden, da der Startknoten auf dem Rand der Region eines Endpunktes liegt. Die Markierung wird daher mit dem Segment fortgeführt, das den entsprechenden Endpunkt hat.

### 4.5.3 Spezielle Knoten und Kanten

Um den Ablauf der einzelnen Algorithmen zu sichern, beinhaltet der Graph einige Kanten und Knoten, die nicht sichtbar sind. Zum einen sind das die Randpunkte, die das Diagramm begrenzen. Zum anderen sind Knoten und Kanten an den Endpunkten der Segmente. Man betrachte dazu die Abbildung 4.9. Alle Knoten innerhalb des Kreises  $\Gamma$  haben die gleiche Position. Die Kanten, die sie verbinden, haben die Länge null. Wichtig hierbei ist aber, dass die topologische Struktur gewahrt bleibt. Der Mittelpunkt  $t$  hat eine eigene Region, obwohl diese keinen Punkt beinhaltet. Der Nutzen zeigt sich, wenn an dem Punkt  $t$  ein weiteres Segment eingefügt wird (vgl. Abbildung 4.10). Durch das Einfügen von  $s_4$  wird nur der Knoten  $v_1$  gelöscht, da nach dem Einfügen von  $s_4$  die Segmente  $s_1$  und  $s_4$  nicht mehr benachbart sind.

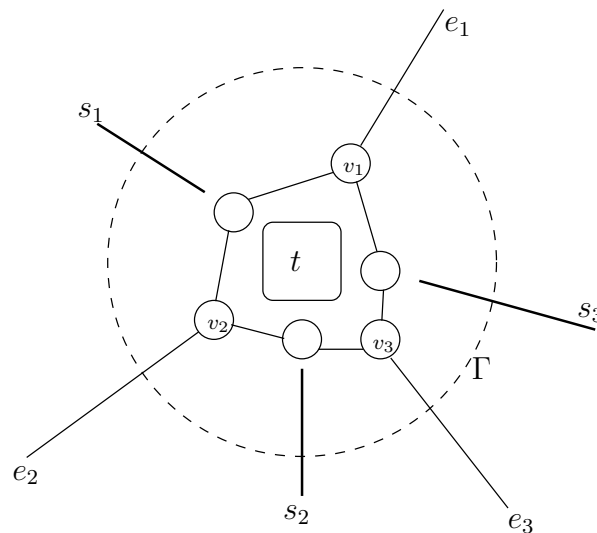


Abbildung 4.9:  $t$  ist Endpunkt mit den Sites  $s_1$ ,  $s_2$  und  $s_3$ . Die Knoten in  $\Gamma$  haben die gleiche Position wie  $t$ .



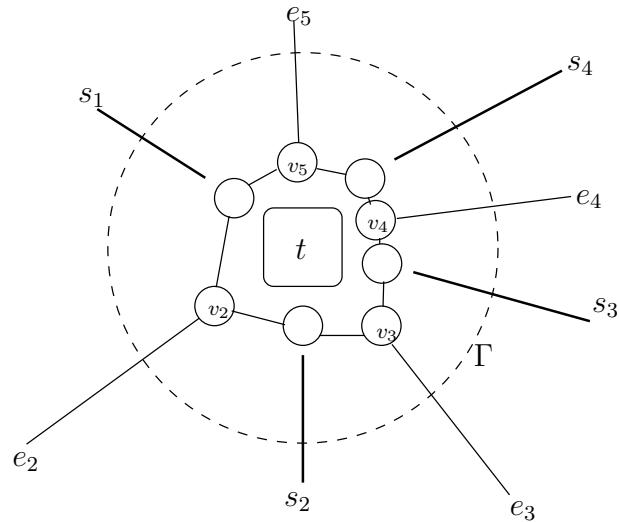


Abbildung 4.10: Segment  $s_4$  wird eingefügt, wodurch  $v_1$  entfernt werden muss.

#### 4.5.4 Temporäres Einfügen

Um Bewegungen von Liniensegmenten durchzuführen, können Liniensegmente temporär eingefügt werden. Der Teil des Diagramms, das geändert wird, wird gesichert. Eine Bewegung erfolgt, indem die Segmente, die bewegt werden, temporär eingefügt werden, dann das Diagramm angezeigt wird und anschließend das Diagramm wiederhergestellt wird.

## 4.6 VoroBand

Der Algorithmus benutzt die Berechnung des Voronoi-Diagramms von Liniensegmenten, von den zwei Voronoi-Diagramme berechnet werden. Ein Diagramm wird nur über dem Laufband angezeigt, das andere unterhalb des Bandes. Auf dem Laufband stimmen beide Diagramme überein. Wir nennen die beide Diagramm OBEN und UNTEN. Der Algorithmus:

**punktEinfuegen(p)**{

Ist  $p \in L^+$ , setze  $a = (p \text{ an } L \text{ gespielt,})$  und  $b = p$ ;

Ist  $p \in L^-$ , setze  $b = (p \text{ an } L \text{ gespielt,})$  und  $a = p$ ;

```

% Berechnung der Stützlinien
Berechne Endpunkte  $o_l, o_r$  und  $u_l, u_r$ 
der Stützgeraden  $s_l^+(p), s_r^+(p)$  und  $s_l^-(p), s_r^-(p)$ ;

% Einfuegen der Stützlinien
  OBEN.segmentEinfuegen( $\overline{au_l}$ )
  OBEN.segmentEinfuegen( $\overline{au_r}$ )
  UNTEN.segmentEinfuegen( $\overline{bo_l}$ )
  UNTEN.segmentEinfuegen( $\overline{bo_r}$ )

% Einfuegen von  $p$ .
Ist  $p \in L^+$ , dann OBEN.punktEinfuegen( $p$ )
Ist  $p \in L^-$ , dann UNTEN.punktEinfuegen( $p$ )
};

```

**Bemerkung.** Die Berechnung der Endpunkte der Stützlinien richtet sich nach der Kontur bestehender Stützlinien der anderen Punkte. Liegt  $a$  oberhalb der Kontur, so werden keine Stützlinien eingefügt, da diese keine Auswirkungen auf das Diagramm haben.

Liegt  $a$  unterhalb der Kontur, so werden von  $a$  die Stützlinien bis zur Kontur eingefügt. Liegt  $a$  auf der Kontur, so wird nur  $a$  eingefügt.

Dieses Vorgehen vermeidet auch das Auftreten von Bisektorflächen. Wir wissen, dass diese Flächen nur auftreten, wenn die Stützlinien sich überlagern. In der Berechnung erfolgt keine Überlagerung, da ein Punkt, der auf einer Stützlinie eines anderen Punktes gesetzt wird, keine Stützlinien erhält.

## 4.7 Implementation

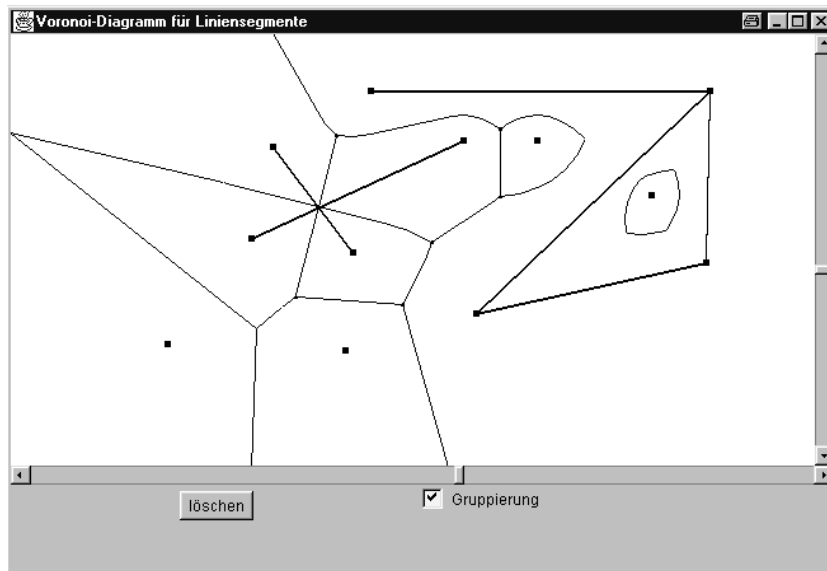
Die Algorithmen wurden in der Programmiersprache Java implementiert.

Die entsprechenden Programmdateien liegen im Verzeichnis

*JavaAnimation/apps/VoroLS/Programm* des CVS-Systems auf den Server *macke.informatik.uni-bonn.de*. Alle Programmdateien sind als Sourcecode und in kompilierter Form gespeichert. Die entsprechenden Applikationen *VoroLS* und *VoroBand* können über einen entsprechenden Interpreter gestartet werden [12].

Die Programme sind aber auch als Applets für Websites aufbereitet. Die entsprechenden Html-Dokumente sind *StartVoroLS.html* und *StartVoroBand.html*.

## Bedienung von Vorols



Die Benutzeroberfläche besteht aus der Zeichenebene und einer Kontrollleiste, die einen Schalter *Löschen* und ein Markierungsfeld *Gruppierung* beinhaltet. Der Benutzer kann mittels der Maus Punkte und Segmente innerhalb einer der Zeichenebene eingeben, verschieben oder löschen. Die eingegebenen Objekte entsprechen den Sites und werden rot dargestellt. Das berechnete Diagramm wird blau gezeichnet, wobei jedoch die Streifenkanten als hellblaue Linien erkennbar sind. Während einer Bewegung eines Objektes wird das Diagramm lokal geändert. Diese Änderung wird schwarz gezeichnet. Durch das Drücken des *Löschen*-Buttons wird das gesamte Diagramm gelöscht.

Das Setzen der *Gruppierung* ermöglicht eine andere Anzeige des Diagramms. Es werden die Kanten nicht dargestellt, deren Sites zu einer gemeinsamen Gruppe gehören. Gruppieren Sites, wenn sie einen gemeinsamen Endpunkt haben. Insbesondere werden die Streifenkanten nicht angezeigt. Mit der *Gruppierung* erhalten Polygonzüge eine eigene Region.

Folgende Mausaktionen sind möglich:

1. **linke Maustaste:** Entspricht die Position des Mauszeigers einem Punkt, so wird dieser markiert. Ist die Position frei, so wird ein neuer Punkt in das Diagramm eingefügt und anschließend markiert.

War vor dem Einfügen bzw. Markierung bereits ein Punkt markiert, so wird zwischen dem alten Punkt oder dem neuen (neu markierten) Punkt ein Segment in das Diagramm eingefügt.

2. **rechte Maustaste:** Diese Taste dient zum Löschen der Sites. Entspricht die Position des Mauszeigers einem Site, so wird dieser entfernt. Ist der Site dabei ein Liniensegment, bleiben die Endpunkte erhalten. Ist der Site ein Punkt, so wird er nur gelöscht, wenn er keinem Segmente als Endpunkt dient.

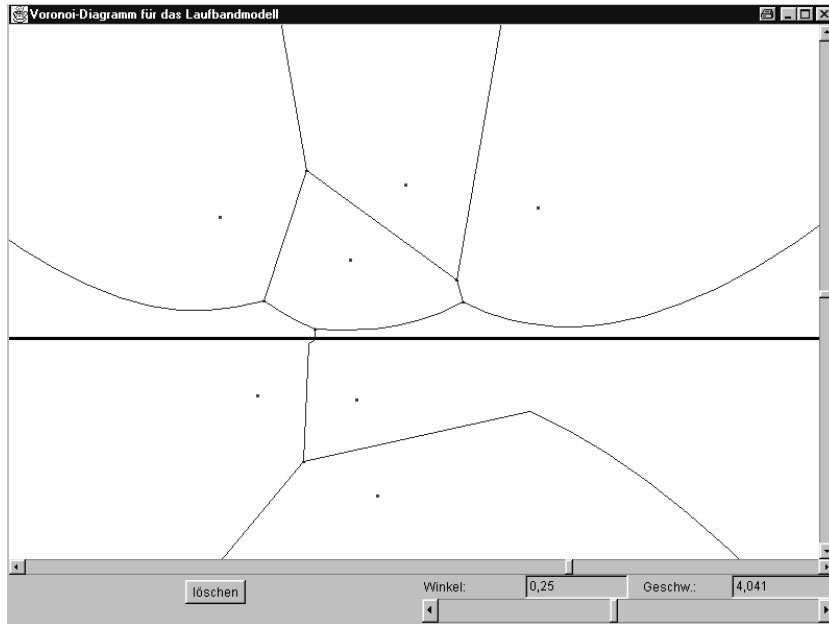
Entspricht die Position des Mauszeigers keinem Site, so werden alle Markierungen entfernt.

3. **linke Maustaste gedrückt lassen und bewegen:** Wird ein bestehender Site markiert, so kann er mit gedrückter Maustaste verschoben werden, bis die Taste wieder losgelassen wird. Es gibt die folgenden Möglichkeiten einer Bewegung:

- Ein isolierter Punkt wird bewegt,
- Parallelverschiebung eines Liniensegments,
- eine „Sternbewegung“, d.h. ein Endpunkt wird mit allen seinen Liniensegmenten verschoben.

Um ein Segment einzufügen, werden nacheinander zwei Punkte gesetzt oder markiert. Um einen isolierten Punkt einzugeben, wird ein Punkt mit der linken Maustaste gesetzt und anschließend die rechte Maustaste in einem freien Bildschirmbereich betätigt.

## Bedienung von VoroBand



Die Benutzeroberfläche besteht aus der Zeichenebene und einer Kontrollleiste. In der Zeichenebene verläuft eine horizontale, schwarze Linie, die das Laufband darstellt. Die Kontrollleiste hat einen Schalter *Löschen* und einen Schieberegler mit zwei Anzeigenfeldern *Winkel* und *Geschwindigkeit*. Über die linke Maustaste werden Punkte eingegeben und bewegt. Mit der rechten Maustaste können Punkte aus dem Diagramm entfernt werden. Der *Löschen*-Button entfernt das gesamte Diagramm. Mit dem Schieberegler kann die Bandgeschwindigkeit variiert werden. Die Wahl ist in Stufen zwischen 1 und „Unendlich“ möglich. Die Größe des Laufbandwinkels wird im Winkelgrad angezeigt.



# Kapitel 5

## Abschließende Bemerkungen

Im Mittelpunkt dieser Arbeit stand das Voronoi-Diagramm im Laufbandmodell. Es wurden die Bisektoren und die Voronoi-Regionen von Punkten näher untersucht. Die zentrale Aussage war:

Das Voronoi-Diagramm von Punkten im Laufbandmodell kann auf ein euklidisches Voronoi-Diagramm von Liniensegmenten zurückgeführt werden.

Diese Eigenschaft zeigte sich nicht zuletzt in der Möglichkeit der Berechnung. Ein Programm für das Voronoi-Diagramm von Liniensegmenten wurde benutzt, um das Diagramm von Punkten im Laufbandmodell zu berechnen.

Nach den Aussagen dieser Arbeit stellen sich weitere interessante Fragen nach der Erweiterbarkeit des Laufbandmodells. Zum einen können auch im Laufbandmodell das Voronoi-Diagramm von anderen Objekten untersucht werden, beispielsweise Liniensegmente.

Hierzu könnte die folgende Überlegung als Ansatz dienen (vgl. Abbildung 5.1): Schneidet das Segment  $l = \overline{ab}$  nicht das Laufband, so endet jeder Laufbandweg von einem Punkt  $p \notin S_l$  nach  $l$  in einem der Endpunkte  $a$  oder  $b$ . Der Bandbereich des Segments wird also von den Bandbereichen seiner Endpunkte bestimmt.

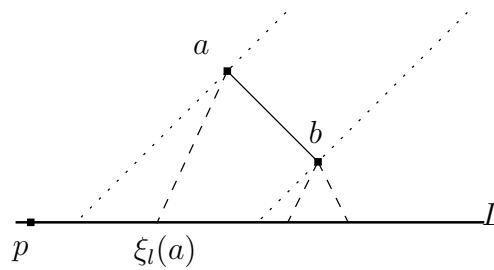


Abbildung 5.1: Ein Segment im Laufbandmodell

Zum anderen kann man im Modell das Laufband weiter verallgemeinern. Statt der Gerade  $L$  kann ein Polygonzug gewählt werden. Oder es können mehrere Laufbänder mit unterschiedlicher Geschwindigkeit in der Ebene liegen.

Die Einfachheit der Überlegungen ist aber keine hinreichende Bedingung für eine Einfachheit der Strukturen solcher Modelle. Im Laufbandmodell selbst führte die Diskussion um die Beschränktheit einer Voronoi-Region zu einem Satz, der verschiedene Fallunterscheidungen beinhaltete. Eine Erweiterung des Laufbandmodells würde entsprechende Fallunterscheidungen weiter unterteilen.



# Literaturverzeichnis

- [1] F. Aurenhammer and R. Klein. Voronoi diagrams. In J.-R. Sack and J. Urrutia, editors, *Handbook of Computational Geometry*, pages 201–290. Elsevier Science Publishers B.V. North-Holland, Amsterdam, 2000.
- [2] R. Descartes. *Principia Philosophiae*. Ludovicus Elzevirius, Amsterdam, 1644.
- [3] G. L. Dirichlet. Über die Reduktion der positiven quadratischen Formen mit drei unbestimmten ganzen Zahlen. *J. Reine Angew. Math.*, 40:209–227, 1850.
- [4] M. Held. Voronoi diagrams of 2D points and line segments. <http://www.cosy.sbg.ac.at/~held/projects/vroni/vroni.html>, 2001.
- [5] M. Held. Vroni: An engineering approach to the reliable and efficient computation of Voronoi diagrams of points and line segments. *Comput. Geom. Theory Appl.*, 18:95–123, 2001.
- [6] C. Icking, L. Ma, and B. Palop. Voronoi diagrams for the continuous model. Unpublished note, 2000.
- [7] T. Imai. A topology oriented algorithm for the Voronoi diagram of polygons. In *Proc. 8th Canad. Conf. Comput. Geom.*, pages 107–112. Carleton University Press, Ottawa, Canada, 1996.
- [8] R. Klein. *Algorithmische Geometrie*. Addison-Wesley, Bonn, 1997.

- [9] J. S. B. Mitchell. Geometric shortest paths and network optimization. In J.-R. Sack and J. Urrutia, editors, *Handbook of Computational Geometry*, pages 633–701. Elsevier Science Publishers B.V. North-Holland, Amsterdam, 2000.
- [10] J. S. B. Mitchell and C. H. Papadimitriou. The weighted region problem: finding shortest paths through a weighted planar subdivision. *J. ACM*, 38:18–73, 1991.
- [11] M. I. Shamos and D. Hoey. Closest-point problems. In *Proc. 16th Annu. IEEE Sympos. Found. Comput. Sci.*, pages 151–162, 1975.
- [12] Sun Microsystems. The source for Java™ technology. <http://java.sun.com/>, 2002.
- [13] G. M. Voronoi. Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques. deuxième Mémoire: Recherches sur les paralléloèdres primitifs. *J. Reine Angew. Math.*, 134:198–287, 1908.